Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer WS 2001/02

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Blatt 3

Aufgabe 7
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) Existiert eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, so ist f injektiv.

b) g ist nicht eindeutig bestimmt. Geben Sie dazu ein (Gegen)beispiel an.

c) Existiert eine Abbildung $h : Y \to X$ mit $f \circ h = \mathrm{Id}_Y$, so ist f surjektiv.

d) Auch hier ist h nicht eindeutig bestimmt. Geben Sie ein (Gegen)beispiel an.

Aufgabe 8
(Kartesisches Produkt von Gruppen)
Es seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Wir definieren auf dem kartesischen Produkt $G \times H$ eine Verknüpfung durch

$$(g_1, h_1) \circ (g_1, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 * h_2)\,,$$

(dabei $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$).
Zeigen Sie, daß $G \times H$ mit dieser Verknüpfung eine Gruppe ist.

Aufgabe 9
(Vorbemerkung: bei dieser Aufgabe gibt es keine 'richtigen' bzw. 'falschen Lösungen', allerdings schon bessere und schlechtere Antworten.)

Wir kennen jetzt drei Gruppen mit 4 Elementen, nämlich $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \oplus)$, $(\mathbb{Z}_5^*, \odot)$. Wir wollen für diese Aufgabe die Elemente von $\mathbb{Z}_m$ für die verschiedenen m unterschiedlich bezeichnen und schreiben $\mathbb{Z}_2 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, $\mathbb{Z}_5^* = \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$.

Schreiben Sie für die drei Gruppen (noch einmal) die jeweilige Verknüpfungstafel auf und versuchen Sie, deren 'Struktur' zu analysieren (wie die einzelnen Elemente aussehen, sollte keine Rolle spielen).

Nun die eigentliche Aufgabe: Äußern Sie sich zu der Frage, ob Sie alle drei Gruppen für wesentlich verschieden halten, bzw. welche sie bei einem paarweisen Vergleich für weniger verschieden halten.

(Noch ein Tip: Wenn Sie einen Idee haben, so können Sie diese auch an Gruppen mit 6 Elementen mit analogen Beispielen testen. Hier kennen wir sogar noch eine weitere Gruppe, nämlich die symmterische Gruppe S_3 aller Permuationen der Menge $\{1, 2, 3\}$.)

Aufgabe 10
Überprüfen Sie, ob nachstehende Relationen auf M Äquivalenzrelationen sind, und geben Sie gegebenenfalls eine geometrische Beschreibung der Äquivalenzklassen:

a) $M := \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2,$

b) $M := \mathbb{R}^2 \quad (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad x_1 y_2 = x_2 y_1,$

c) $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad x_1 y_2 = x_2 y_1.$

<u>Abgabetermin:</u> Dienstag, 06.11.2001, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude