

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I Blatt 5

Aufgabe 14

Es sei G eine Gruppe und H_1, H_2 zwei Untergruppen von G . Zeigen Sie, dass auch $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe ist.

Hier zur Sicherheit noch einmal die Definition des Begriffs "Untergruppe".

Definition. Es sei (G, \cdot) eine Gruppe mit neutralem Element e . Eine Teilmenge U von G heißt *Untergruppe* von G , falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind.

(U1) $e \in U$

(U2) Für alle $u, v \in U$ gilt $u \cdot v \in U$.

(U3) Für alle $u \in U$ gilt $u^{-1} \in U$.

Aufgabe 15

Man zeige folgendes:

- a) Wenn von zwei isomorphen Gruppen die eine kommutativ ist, dann auch die andere.
- a) Gegeben sei eine Gruppe G und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x^k := x \cdot x \cdot \dots \cdot x = e$ (dabei k Faktoren x) für alle $x \in G$, bzw. bei additiver Schreibweise der Verknüpfung $x + x + \dots + x = 0$. Dann gilt dieses mit dem gleichen k auch für jede isomorphe Gruppe.
(In der Vorlesung hatten wir den Fall $k = 2$ besprochen.)

Wie immer gilt: Sie müssen die technische Definition von 'Isomorphie' benutzen, nicht nur die Idee.

Aufgabe 16

Untersuchen Sie die folgenden Paare von Gruppen auf Isomorphie.

- a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ und \mathbb{Z}_6
- b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ und \mathbb{Z}_8

Die Verknüpfung ist immer die Addition \oplus .

Aufgabe 17 Bestimmen Sie in \mathbb{Z}_p für $p = 23, 31$ und 97 jeweils alle Lösungen der Gleichung

$$[14]_p \odot x \oplus [5]_p \odot y = [62]_p.$$

(Schreiben Sie bei der Rechnung ruhig $\overline{14}$ statt $[14]_{23}$ und $\overline{5}x$ statt $\overline{5} \odot x$, usw.)

Abgabetermin: Dienstag, 20.11.2001, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude