

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Blatt 6

Aufgabe 18

Sei X eine nichtleere Menge. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{ccc} \phi : (\mathcal{P}(X), \Delta) & \rightarrow & (\text{Abb}(X, \mathbb{F}_2), \oplus) \\ A & \mapsto & \chi_A \end{array}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. Die sogenannte *charakteristische Funktion* χ_A ist dabei durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} \bar{0}, & x \notin A \\ \bar{1}, & x \in A \end{cases}$$

definiert.

Aufgabe 19

Untersuchen Sie, ob folgende Teilmengen Untervektorräume von V sind.

a) $V = \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ U_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \\ U_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0\} \end{aligned}$$

b) $V = \mathbb{F}_2^3$:

$$\begin{aligned} U_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_2^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \\ U_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_2^3 \mid x + xy + z = 0\} \end{aligned}$$

c) $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$U_6 = \{f \in V \mid f(x) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 20

Seien V ein K -Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume. Sind dann auch $U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ Untervektorräume?

(Man definiert $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$.)

Bitte wenden.

Aufgabe 21

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind:

a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_3 - 2x_1, x_1 - x_3 + x_3)$,

b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 1, x_2 - x_3)$,

c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, x_1^3 + x_2)$,

d) $f : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^2$ mit $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, x_1^3 + x_2)$,

e) $f : \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\varphi) = \varphi(1)$.

Abgabetermin: Dienstag, 27.11.2001, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude