Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2001/02

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Blatt 7

Aufgabe 22

a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{2-i}{2+3i},\ \frac{3-2i}{1+4i},\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4,\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10},$$
$$\frac{(2-2i)(1+3i)+(1+i)\overline{(2-3i)}}{(3+i)(1-i)+(2-i)(1+3i)}$$

b) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für die gilt $(1+i)^n + (1-i)^n = 0$.

Aufgabe 23

Bestimmen Sie z und w aus den folgenden beiden linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcr} (3i)z & + & (-1-i)w & = & -10+3i \\ (1-2i)z & + & (3-i)w & = & 9-8i \end{array} .$$

Aufgabe 24

Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $v_1, \ldots, v_m \in V$. Zeigen Sie:

$$f(\mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_m\}) = \mathrm{Lin}\{f(v_1), \ldots, f(v_m)\}.$$

In Worten: das Bild des von den Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ aufgespannten Teilraums von V ist der von den Bildvektoren aufgespannte Teilraum von W.

Aufgabe 25

In $\mathbb{R}^3$ seien

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, daß $\{a_1, a_2, a_3\}$ und $\{b_1, b_2, b_3\}$ linear unabhängig sind.

b) Stellen Sie, sofern möglich, jeden der Vektoren b_1, b_2, b_3 als Linearkombination der Vektoren a_1, a_2, a_3 dar.

Abgabetermin: Dienstag, 04.12.2001, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude