Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2001/02

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Blatt 8

Aufgabe 26

a) Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$ linear unabhängig sind:

$$c_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -4 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

b) Seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$f_1(x) := x^2, \quad f_2(x) := 2x+1, \quad f_3(x) := x^2 - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind.

Aufgabe 27

Es seien V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig, falls es linear unabhängige Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ gibt mit $v_i = \lambda_i w_i$ für alle $1 \le i \le n$.

b) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig, falls $v_n \notin \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$.

c) Die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist linear unabhängig, falls jede echte Teilmenge linear unabhängig ist.

Aufgabe 28

Es seien $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ erklärt durch

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad G\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für die Abbildungen $F, G, F \circ G$ und $G \circ F$ jeweils Basen des Kerns und des Bildes.

Aufgabe 29
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathrm{Pol}_4(\mathbb{R})$ der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 4 und die lineare Abbildung

$$\Phi : V \to \mathbb{R}^3, \quad f \mapsto (f(-1), f(0), f(1)).$$

Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}\,\Phi$ und $\mathrm{Bild}\,\Phi$. Zu einer expliziten Beschreibung des Kerns gehört auch die Bestimmung seiner Dimension.

Abgabetermin: Dienstag, 11.12.2001, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude