Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2001/02

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Blatt 9

Aufgabe 30

Sei V ein K-Vektorraum und $(a_1, \dots, a_n)$ eine Basis. Zeigen Sie:

a) Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ ist $(\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_n a_n)$ eine Basis von V.

b) Für $1 \leq i \leq n$ sei $b_i := a_1 + \ldots + a_i$. Dann ist $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V.

Aufgabe 31

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. V ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, wobei die Addition dieselbe ist und die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ als Einschränkung der Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ definiert ist.

a) Sei $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(x_i) = 0\}$. Untersuchen Sie, ob U ein Untervektorraum des $\mathbb{C}$- bzw. des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}^n$ ist.

b) Es sei $(a_1, \dots, a_n)$ eine Basis von V als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums mit Beweis an. (Tipp: Betrachten Sie die Basis $1, i$ von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.)

Aufgabe 32

Tauschen Sie zwei Vektoren der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ gegen die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aus, so dass man wieder eine Basis des $\mathbb{R}^4$ erhält.

Bitte wenden.

Aufgabe 33
Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

a) Sei $(v_1, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V. Zeigen Sie:

$$f \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad (f(v_1), \dots, f(v_n)) \text{ ist Erzeugendensystem von W}$$

b) Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Zeigen Sie:

$$f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad (f(v_1), \dots, f(v_n)) \text{ ist linear unabhängig}$$

c) In b) wird $(v_1, \dots, v_n)$ als Basis vorausgesetzt. Reicht es, von $(v_1, \dots, v_n)$ zu verlangen, dass es

- nur linear unabhängig,
- nur ein Erzeugendensystem

ist?

Abgabetermin: Dienstag, 18.12.2001, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude