Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2001/02

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Blatt 10

Aufgabe 34
Es sei $\mathcal{F} = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R}\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$ der Folgenraum über $\mathbb{R}$ und es seien $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\vec{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$. Eine Folge $(x_0, x_1, \dots)$ heißt $\vec{\lambda}$-Folge falls $x_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x_{n+i}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der $\vec{\lambda}$-Folgen wird mit $T_{\vec{\lambda}}$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, daß $T_{\vec{\lambda}}$ ein Teilraum von $\mathcal{F}$ ist.

b) Welche Dimension hat $T_{\vec{\lambda}}$? (Tipp: Betrachten Sie zunächst die Fälle $k = 1$ und $k = 2$.)

Hinweis: Ist $k = 1$, so heißt eine $\vec{\lambda}$-Folge auch eine geometrische Folge.
Ist $k = 2$ und $\vec{\lambda} = (1, 1)$, so heißt eine λ-Folge auch Fibonacci-Folge.

Aufgabe 35

a) Es sei $\mathcal{F} = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(z) = 0 \text{ für alle ganzen Zahlen } z \text{ zwischen -5,1 und 5,1}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ ein Unterraum von $\mathcal{F}$ ist.

b) Finden Sie ein Komplement von $\mathcal{G}$ in $\mathcal{F}$.

Aufgabe 36
Seien V, W endlich erzeugte K-Vektorräume. Auf

$$V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$$

seien durch

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

und

$$\lambda(v_1, w_1) = (\lambda v_1, \lambda w_1)$$

für $v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W, \lambda \in K$ eine Addition und eine Skalarmultiplikation definiert. Zeigen Sie:

a) $V \times W$ ist ein K-Vektorraum.

b) $\widetilde{V} = \{(v, 0) \mid v \in V\}$ und $\widetilde{W} = \{(0, w) \mid w \in W\}$ sind Untervektorräume von $V \times W$ mit $V \times W = \widetilde{V} \oplus \widetilde{W}$.

c) Die Dimension von $V \times W$ ist die Summe der Dimensionen von V und W.

Bitte wenden.

Aufgabe 37
Es sei M eine endliche Menge, K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\mathcal{M} = \mathrm{Abb}(M, V)$. Auf $\mathcal{M}$ sei eine Addidtion durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ für alle } x \in M$$

und eine Skalarmultiplikation durch

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) \text{ für alle } x \in M$$

für alle $f, g \in \mathcal{M}, \lambda \in K$ definiert. Zeigen Sie, dass der so definierte K-Vektorraum $\mathcal{M}$ endlich erzeugt ist, und bestimmen Sie seine Dimension. (Tipp: Behandeln Sie zunächst den Fall, dass $V = K$ ist.)

Abgabetermin: Dienstag, 08.01.2002, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!