Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2001/02

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Blatt 11

Aufgabe 38
Es seien zwei lineare Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 5x_2 + 5x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter seien $U_1 := \mathrm{Kern}(f)$, sowie $U_2 := \mathrm{Kern}(g)$.

a) Geben Sie Matrizen A und B an, so dass $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ und $g(\vec{x}) = B\vec{x}$ ist.

b) Bestimmen Sie $\dim U_1$, $\dim U_2$ und $\dim(U_1 + U_2)$ unter Benutzung von Dimensionsformeln.

Aufgabe 39
Geben Sie direkte Beweise der folgenden Aussagen, ohne den Dimensionssatz für Unterräume aus der Vorlesung oder ähnliches zu benutzen.

a) Es sei $V = U_1 \oplus U_2$, weiter $(a_1, \ldots, a_k)$ eine Basis von U_1 und $(b_1, \ldots, b_l)$ eine Basis von U_2. Dann ist $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, a_l)$ eine Basis von V.

b) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $0 < k < n$; setze $U_1 := \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_k\}$, $U_2 := \mathrm{Lin}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Dann ist $V = U_1 \oplus U_2$

Aufgabe 40
Die Matrizen A, B und C mit Elementen aus $\mathbb{R}$ seien definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, soweit möglich, die folgenden Matrizenausdrücke:

a) AB und BA,

b) C^{100},

c) $A(BA - C)$ und $ACB + ABC$.

Bitte wenden.

Aufgabe 41
Was soll man von den folgenden „Rechenregeln“ für $n \times n$-Matrizen halten?

a) $(A+B)^2 \stackrel{?}{=} A^2 + 2AB + B^2$;

b) $A^2 + B^2 = 0 \stackrel{?}{\Longrightarrow} A = B = 0$;

c) $AB = 0 \stackrel{?}{\Longrightarrow} BA = 0$;

d) $BA = 0 \stackrel{?}{\Longrightarrow} (AB)^2 = 0$.

Abgabetermin: Dienstag, 15.01.2002, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude