Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2001/02

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Blatt 13

Aufgabe 46

Untersuchen Sie folgende Gleichungssysteme über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_5$ auf Lösbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge:

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{b} = (\overline{2}, \overline{3}, \overline{1}, \overline{3})$

b) $\vec{b} = (\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{3})$

Wie viele Lösungen gibt es?

Aufgabe 47

Gegeben seien die Funktionen $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$, $f_3(x) = \sin^2(x)$, $f_4(x) = \sin(x)\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ linear unabhängig ist.
Setze $V := \mathrm{Lin}\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

b) Zeigen Sie: Die Ableitung $\frac{d}{dx}$ liefert eine lineare Abbildung von V in sich.

c) Geben Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}(\frac{d}{dx})$ bezüglich der Basis $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ an.

Aufgabe 48

Sei $V \neq \{0\}$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\mathrm{Kern}\, f^2 = \mathrm{Kern}\, f$. Zeigen Sie:

a) $V = \mathrm{Kern}\, f \oplus \mathrm{Bild}\, f$.

b) Es existiert eine Basis von V, bezüglich der die Matrix von f folgende Blockgestalt hat: $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$, d.h. es existiert ein $k \in \{0, 1, \ldots, \dim V\}$ mit $a_{ij} = 0$ für $i \leq k$ oder $j \leq k$.

Bitte wenden.

Aufgabe 49

a) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{A} = (e_1, \ldots, e_4)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_4)$ folgende Basis mit $b_1 = (1, 1, 2, 0)$, $b_2 = (3, 2, 5, -1)$, $b_3 = (-2, -1, -2, 2)$, $b_4 = (1, 0, 4, 1)$.
Bestimmen Sie $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

b) Bestimmen Sie zwei Basen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ des $\mathbb{R}^4$, so dass die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{A}_2}^{\mathcal{A}_1}(f)$ gleich $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist für passendes r.

Abgabetermin: Dienstag, 29.01.2002, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude