Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer WS 2001/02

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Blatt 14

Aufgabe 50

Es seien A, B die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -11 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle reellen 3×3-Matrizen X mit $AX = B$. Gibt es eine reelle 3×3-Matrix Y mit $BY = A$?

Aufgabe 51

Sei V ein K-Vektorraum. Dann heißt $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der zu V duale Vektorraum.

a) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ eine Basis von V, so bilden die Abbildungen $a_i^* \in V,\ i = 1, \ldots, n$, die durch

$$a_i^*(a_j) = \delta_{ij},\ j = 1, \ldots, n$$

definiert sind, eine Basis von V^*, die sogenannte *duale Basis* $\mathcal{A}^*$.
(Für das *Kroneckersymbol* δ_{ij} gilt $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$.)

b) Seien V, W K-Vektorräume, $f : V \to W$ linear. Dann heißt die lineare Abbildung $f^* : W^* \to V^*,\ \varphi \mapsto \varphi \circ f$ die zu f duale Abbildung. (Man beweise die Linearität.)
Zeigen Sie: Sind $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_r)$ Basen von V bzw. W, so gilt für die Darstellungsmatrix von f^* bezüglich der dualen Basen $\mathcal{A}^*$ und $\mathcal{B}^*$:

$$M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)\right)^t.$$

Aufgabe 52

Gegeben Sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 9 & 4 & -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie reguläre, d.h. invertierbare, Matrizen S, T mit

$$SAT = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\}.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 53
Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ heissen *ähnlich*, wenn es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt mit $B = SAS^{-1}$.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei der Ähnlichkeit von Matrizen um eine Äquivalenzrelation handelt.

b) Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass es einen K-Vektorraum V, einen Endomorphismus $f : V \to V$ sowie Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt, so dass
$$A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \quad \text{und} \quad B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f).$$

Abgabetermin: Dienstag, 05.02.2002, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude