Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2001/02

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra und analytische Geometrie I
Blatt 15

Aufgabe 54

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_4)$ und W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_5)$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, die gegeben ist durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 7 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -17 & 5 \end{pmatrix}.$$

Schliesslich seien $\mathcal{A}' = (a_1', \ldots, a_4')$ mit $a_1' = a_1 + a_2,\ a_2' = a_2 + a_3,\ a_3' = a_3 + a_4,\ a_4' = a_4$ und $\mathcal{B}' = (b_1', \ldots, b_5')$ mit $b_1' = b_1,\ b_2' = b_1 + b_2,\ b_3' = -b_1 + b_3,\ b_4' = b_1 + b_4,\ b_5' = b_1 + b_5$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}'$ eine Basis von V und $\mathcal{B}'$ eine Basis von W ist.

b) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}'}(f)$, $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(f)$.

Aufgabe 55

Es sei $V = \mathbb{F}_p^4$ für eine Primzahl p, $U = \operatorname{Lin}\{ \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{3} \\ -\overline{2} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \}$.

a) Geben Sie eine Basis von V/U an.

b) Geben Sie eine Basis des Annulators $U^\circ \subseteq V^*$ an.

Aufgabe 56

In der folgenden Aufgabe wollen wir die Nützlichkeit des Dualraumes, insbesondere der Auswertungs-Abbildungen, eines Funktionenraumes andeuten. Der erste Teil ist noch allgemein gehalten.

a) Seien $f_1, \cdots, f_k$ Elemente eines Vektorraumes V derart , dass Linearformen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ existieren, so dass die k Zeilenvektoren $(\varphi_1(f_i), \varphi_2(f_i), \ldots, \varphi_k(f_i))$, $i = 1, \ldots, k$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, dass dann $f_1, \ldots, f_k$ linear unabhängig sind.

b) Wir legen den endlichen Körper $K = \mathbb{F}_7$ zugrunde. Es sei $V := \operatorname{Abb}(K, K)$ und $f_i \in V$ durch $f_i(x) = x^i,\ i = 0, 1, 2, 3$ definiert. Geben Sie Punkte $a_0, a_1, a_2, a_3 \in K$ an, so dass die Auswertungsabbildungen $\varphi_{a_i} \in V^*$, $f \mapsto f(a_i)$ die Vorausetzungen von Teil a) erfüllen.

Bitte wenden.

c) Geben Sie in der Situation von b) explizite Linearkombinationen g_0, g_1, g_2, g_3 der f_i (also Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3) an so, daß $g_i(a_j) = \delta_{ij}$, $0 \leq i, j \leq 3$.
(Tipp: Betrachten Sie die Matrix mit den Zeilenvektoren $(\varphi_{a_1}(f_i), \ldots, \varphi_{a_n}(f_i))$ für $i = 1, \ldots, n$.)

Aufgabe 57
Gegeben Seien die Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\pi \circ \rho$, $\rho \circ \pi$, $\pi^{-1} \circ \rho$ und $\rho^{-1} \circ \pi$.

b) Zerlegen Sie π, ρ, π^{-1} und ρ^{-1} in elementfremde Zyklen und bestimmen Sie das jeweilige Signum.

Abgabetermin: Dienstag, 12.02.2002, 18.00 Uhr,
Übungskästen Mathematikgebäude