Lösungen des Ferienblatts

Aufgabe 58

a) $p = 2:$
Für die Transformationsmatrizen $T := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}_5}(id)$ und $S := M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(id)$ ergibt sich

$$T = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

und

$$S = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$M^{\mathcal{E}_5}_{\mathcal{B}}(f) = AT = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \; M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}_3}(f) = SA = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

sowie

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = SAT = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

$p = 3$:
Die Transformationsmatrix $T := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}_5}(id)$ entspricht der für $p = 2$. Für $S := M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(id)$ ergibt sich

$$S = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man

$$M^{\mathcal{E}_5}_{\mathcal{B}}(f) = AT = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix}, \; M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}_3}(f) = SA = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix}$$

sowie

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = SAT = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \end{pmatrix}.$$

b) $p = 2$:
Es ist Rang $A = 2$. (Die dritte Zeile ist Summe der ersten und zweiten Zeile.) Eine Basis des Kerns ist

$$a_3 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \; a_4 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \; a_5 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix}.$$

Ergänze mit $a_1 = (\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0})$ und $a_2 = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0})$ zu einer Basis $\mathcal{A}_1 = (a_1, \ldots, a_5)$ des K^5. Eine Basis von Bild f erhält man mit $b_1 := Aa_1 = (\overline{1}, \overline{0}, \overline{1})$ und $b_2 := Aa_2 = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1})$. Ergänze mit $b_3 := (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1})$ zu einer Basis $\mathcal{B}_1 = (b_1, \ldots, b_3)$ des K^3.
Dann hat die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{A}_1}(f)$ die gewünschte Form

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

$p = 3$:
Es ist Rang $A = 3$. Eine Basis des Kerns ist

$$a_4 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \; a_5 = \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{2} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix}.$$

Ergänze mit $a_1 = (\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0})$, $a_2 = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0})$ und $a_3 = (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0})$ zu einer Basis $\mathcal{A}_1 = (a_1, \ldots, a_5)$ des K^5. Eine Basis $\mathcal{B}_1$ von Bild f und damit von K^3 erhält man mit $b_1 := Aa_1 = (\overline{1}, \overline{0}, \overline{1})$, $b_2 := Aa_2 = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1})$ sowie mit $b_3 := Aa_3 = (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0})$.
Dann hat die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{A}_1}(f)$ die gewünschte Form

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

c) $p = 2$:
Die Matrizen S und T ergeben sich nach b) durch die Transformationsmatrizen $T = M_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{A}_1}(id)$ und $S = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{E}_3}(id)$. Also

$$T = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}.$$

$p = 3$:
Die Matrizen S und T ergeben sich nach b) durch die Transformationsmatrizen $T = M_{\mathcal{E}_5}^{\mathcal{A}_1}(id)$ und $S = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{E}_3}(id)$. Also

$$T = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 59

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} = -45 \qquad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

(Am einfachsten kommt man auf die Ergebnisse, indem man die Matrizen auf Zeilenstufenform bringt.)

Aufgabe 60

a) Die Matrix wird durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform gebracht. Im ersten Schritt wird die letzte Zeile von allen anderen Zeilen abgezogen. Im zweiten Schritt werden dann die ersten $n-1$ Zeilen von der n-ten Zeile abgezogen.

$$\begin{vmatrix} b_1 & a & \cdots & a \\ a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & a \\ a & \cdots & a & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1-a & 0 & \cdots & 0 & a-b_n \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & b_{n-1}-a & a-b_n \\ a & & \cdots & a & b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_1-a & 0 & \cdots & 0 & a-b_n \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & b_{n-1}-a & a-b_n \\ 0 & \cdots & & 0 & b_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \frac{a(a-b_n)}{b_j-a} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n-1}(b_i-a)\right)\left(b_n + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{a(b_n-a)}{b_j-a}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n-1}(b_i-a)\right)(b_n-a)\left(\frac{b_n}{b_n-a} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{a}{b_j-a}\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n}(b_i-a)\right)\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a}{b_j-a}\right)$$

b) Es reicht, den Fall zu betrachten, dass $a, b, c, d \neq 0$ sind. Dann lassen sich in jeder Zeile und Spalte die Variablen $a, \ldots, d$ als Faktoren rausziehen:

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ab & b^2+1 & bc & bd \\ ac & bc & c^2+1 & cd \\ ad & bd & cd & d^2+1 \end{vmatrix} = abcd \begin{vmatrix} \frac{a^2+1}{a} & b & c & d \\ a & \frac{b^2+1}{b} & c & d \\ a & b & \frac{c^2+1}{c} & d \\ a & b & c & \frac{d^2+1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2d^2 \begin{vmatrix} \frac{a^2+1}{a^2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{b^2+1}{b^2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{c^2+1}{c^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{d^2+1}{d^2} \end{vmatrix}.$$

Die verbleibende Determinante hat die Gestalt der in Teil a) berechneten. Damit folgt

$$a^2b^2c^2d^2 \begin{vmatrix} \frac{a^2+1}{a^2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{b^2+1}{b^2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{c^2+1}{c^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{d^2+1}{d^2} \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2d^2 \left(\left(\frac{a^2+1}{a^2} - 1 \right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{d^2+1}{d^2} - 1 \right) \right) \left(1 + \frac{1}{\frac{a^2+1}{a^2} - 1} + \ldots + \frac{1}{\frac{d^2+1}{d^2} - 1} \right)$$

$$= a^2b^2c^2d^2 \left(\frac{1}{a^2b^2c^2d^2} \right) (1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Für den Fall dass eine der Variablen gleich Null ist, reduziert sich die Aufgabe auf die Berechnung einer Determinante gleicher Struktur, aber kleinerer Dimension. (Ein Diagonalelement wird zu 1, in der entsprechenden Zeile und Spalte stehen sonst nur Nullen.)

Aufgabe 61

Beh.: $\operatorname{Kern} f^* = \{\varphi \in W^* \mid \varphi(w) = 0 \text{ für alle } w \in f(V)\}$

Bew.:

„$\subseteq$“: Sei $\varphi \in \operatorname{Kern} f^*$. D.h. für alle $v \in V$ gilt $f^*(\varphi)(v) = 0$. Insbesondere also für alle $w = f(v) \in f(V)$. Damit folgt $\varphi(w) = \varphi(f(v)) = f^*(\varphi)(v) = 0$.

„$\supseteq$“: Sei $\varphi \in W^*$ derart, dass $\varphi(w) = 0$ für alle $w = f(v) \in f(V)$. Dann ist $f^*(\varphi)(v) = \varphi(f(v)) = 0$ für alle $v \in V$. Also ist $\varphi \in \operatorname{Kern} f^*$. $\square$

a) Sei $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n)$ eine Basis von W derart, dass $(w_1, \ldots, w_k)$ eine Basis von $f(V)$ ist. Der obige Beweis zeigt, dass $\operatorname{Kern} f^* = (f(V))^\circ$ ist. Dann ist (nach Satz 15.11) $(w^*_{k+1}, \ldots, w^*_n)$ eine Basis von $\operatorname{Kern} f^*$. Damit folgt die Behauptung.

b) Anwendung der von Teil a) und den Dimensionsformeln liefert $\operatorname{Rang} f^* = \dim W^* - \dim \operatorname{Kern} f^* \overset{a)}{=} \dim W^* - \dim W + \dim \operatorname{Bild} f = \operatorname{Rang} f$.

Aufgabe 62

a) Zu zeigen ist, dass aus $\overline{v} = \overline{v'}$ folgt: $\overline{f(v)} = \overline{f(v')}$. Sei also $\overline{v} = \overline{v'}$, d.h. $v + U = v' + U$ oder äquivalent $v - v' \in U$. Da nach Voraussetzung $f(U) \subseteq U$ gilt, ist $f(v - v') = f(v) - f(v') \in U$. Damit folgt aber, dass $\overline{f(v)} = \overline{f(v')}$ ist. Die Abbildung ist also wohldefiniert.
$\overline{f}$ ist linear: Seien $\overline{v}, \overline{w} \in V/U$, sowie $\lambda \in K$. Dann ist. $\overline{f}(\overline{v} + \lambda \overline{w}) = \overline{f}(\overline{v + \lambda w}) = \overline{f(v + \lambda w)} = \overline{f(v) + \lambda f(w)} = \overline{f(v)} + \lambda \overline{f(w)} = \overline{f}(\overline{v}) + \lambda \overline{f}(\overline{w})$.

b) Sei $1 \leq i \leq r$. Dann ist $f(a_i) \in U$ und es gilt

$$f(a_j) = f|_U(a_j) = \sum_{j=1}^{r} \left(M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f|_U) \right)_{ji} \cdot a_j = \sum_{j=1}^{r} \left(M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f|_U) \right)_{ji} \cdot a_j + \sum_{j=1}^{s} 0 \cdot b_j.$$

Sei $1 \leq i \leq s$. Dann ist

$$\overline{f}(\overline{b_i}) = \overline{f(b_i)} = \sum_{j=1}^{s} \left(M^{\overline{\mathcal{B}}}_{\overline{\mathcal{B}}}(\overline{f}) \right)_{ji} \cdot \overline{b_j}.$$

Es folgt

$$f(b_i) - \sum_{j=1}^{s} \left(M^{\overline{\mathcal{B}}}_{\overline{\mathcal{B}}}(\overline{f}) \right)_{ji} \cdot b_j = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ji}\, a_j \in U$$

für geeignete Koeffizienten $\alpha_{ji} \in K$. Damit folgt die Behauptung

$$f(b_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ji}\, a_j + \sum_{j=1}^{s} \left(M^{\overline{\mathcal{B}}}_{\overline{\mathcal{B}}}(\overline{f}) \right)_{ji} \cdot b_i.$$