E. Becker
A. Fischer

Wintersemester 01/02

Übungsaufgaben
zur Vorlesung "Lineare Algebra I" für Lehramt

Blatt 6 **Abgabe bis 26.11. um 10.00 Uhr**

Aufgabe 1

Weisen Sie nach, ob durch folgende Relationen Äquivalenzrelationen definiert sind:
a) Für x, y in $\mathbb{Z}$ gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y = 0$ oder $xy > 0$.
b) Für x, y in $\mathbb{Q}$ gelte $x \sim y$ ganau dann, wenn $xy \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$. Folgende Relation heisst Kongruenzrelation auf $\mathbb{Z}$:
Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sei
$a \equiv b \bmod n \quad :\Leftrightarrow n \mid (a - b)$.
Zeigen Sie, dass "$\equiv$" eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3

Sei die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(n) = n^2 + (-1)^n \cdot 2n + 1$.
Bestimmen Sie $f(\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{0\})$ und $f^{-1}(A)$, wobei A die Menge aller geraden Quadratzahlen in $\mathbb{Z}$ sei.

Bonusaufgabe

Seien $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 0)$ Abbildungen.
a) Bestimmen Sie $g(\{(k, k) \mid k \in \mathbb{R}\})$.
b) Sei $a \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Geben Sie $g^{-1}(a)$ in formaler Mengenschreibweise an und beschreiben Sie diese Menge auch geometrisch.
c) Bestimmen Sie $(h \circ g)(\mathbb{R}^2)$ und $(g \circ h)(\mathbb{R})$.
(mit Nachweisen natürlich)