E. Becker
A. Fischer

Wintersemester 01/02

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Lineare Algebra I" für Lehramt

Blatt 7 **Abgabe bis 3.12.01 um 10.00 Uhr**

Aufgabe 1

Sei M die Menge der ganzen Zahlen, die zwischen -10 und 20 liegen. Zwei Elemente von M seien äquivalent genau dann, wenn ihre Quadrate gleich sind.
Zeigen Sie, dass hiermit eine Äquivalenzrelation definiert ist, und geben Sie die Partition der Menge M in Äquivalenzklassen an.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $\{K_i\}_{i\in\mathbb{R}}$ mit $K_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y + i\}$ eine Partition der Menge aller Punkte der $x-y-$Ebene ist, und beschreiben Sie die zugehörige Äquivalenzrelation mit Worten.

Aufgabe 3

a) Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

b) Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar.

c) Finden Sie die Fehler in folgendem "Beweis":
Behauptung: Jeweils n beliebige reelle Zahlen sind einander gleich, $n \in \mathbb{N}$.
Beweis:
Induktionsanfang: Sei a eine beliebige reelle Zahl. a ist sich selbst gleich.
Induktionsschluss:
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung ist wahr für n reele Zahlen.
Folgerung: Sei $a_1, ..., a_{n+1}$ eine beliebige Auswahl reeller Zahlen. Dann ist $a_1 = ... = a_n$ nach Induktionsvoraussetzung, und ebenfalls $a_2 = ... = a_{n+1}$ nach Induktionsvoraussetzung, da es sich jeweils um n reelle Zahlen handelt. Es folgt, dass $a_1 = a_2 = ...a_{n+1}$.

Bonusaufgabe

Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung und sei mit $x \sim_f y :\iff f(x) = f(y)$ eine Relation definiert.
a) Zeigen Sie, dass "$\sim_f$" eine Äquivalenzrelation ist.
b) Sei nun $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto sgn(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$
Stellen Sie die Äquivalenzklassen der Relation $\sim_f$ graphisch dar.