E. Becker
A. Fischer

Wintersemester 01/02

Übungsaufgaben
zur Vorlesung "Lineare Algebra I" für Lehramt

Blatt 11 **Abgabe bis 14.1.02 um 10.00 Uhr**

Aufgabe 1

Seien $\sigma_i \in S_6$ für $i = 1, ..., 13$.
a) Geben Sie $\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ in zykelschreibweise und auch als Produkt von Transpositionen an.
b) Bestimmen Sie die Inversen von $\sigma_4 := (1423)$, $\sigma_5 := (152)(634)$ und $\sigma_6 := (12)(34)$.
c) Berechnen Sie $(\sigma_7)^{1175}$ für $\sigma_7 := (123)(45)$.
d) Bestimmen Sie das kleinste $k_i \in \mathbb{N}$,$8 \leq i \leq 13$, für das gilt: $\sigma_i^{k_i} = id$, wobei $\sigma_8 := (12), \sigma_9 := (234), \sigma_{10} := (5163), \sigma_{11} := (15)(23), \sigma_{12} := (23)(615), \sigma_{13} := (14)(2356)$.
e) Nennen Sie eine Regel, wie man ohne Berechnen von Potenzen für ein beliebiges $\sigma \in S_n$ das kleinste k finden kann, für das $\sigma^k = id$.

Aufgabe 2

a) Geben Sie die Menge $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, \cdot)^*$ in aufzählender Form an und bestimmen Sie von jedem Element die Potenzen und das Inverse.
b) Nennen Sie zwei verschiedene echte Untergruppen von $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, \cdot)^*$.
(Eine Untergruppe einer Gruppe $(G, \cdot)$ ist eine Teilmenge von G, die bzgl. derselben Verknüpfung $\cdot$ eine Gruppe bildet.)

Aufgabe 3

a) Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie, dass $(R, \cdot)^*$ eine Gruppe bildet.
b) Geben Sie die Menge der bzgl. $\cdot$ invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}$ an.
c) Geben Sie die Menge der bzgl. $\cdot$ invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ an.

Bonusaufgabe

Überprüfen Sie, ob folgende Mengen Ringe sind:
a) $(\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}, +, \cdot)$, wobei die Verknüpfungen wie folgt definiert sind: für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gelte: $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$ und $(a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c, b \cdot d)$.
b) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$, wobei $2\mathbb{Z} := \{x \mid \exists z \in \mathbb{Z} : 2z = x\}$ und $+, \cdot$ die auf $\mathbb{Z}$ definierten Verknüpfungen seien.