E. Becker
A. Fischer

Wintersemester 01/02

Übungsaufgaben
zur Vorlesung “Lineare Algebra I” für Lehramt

Blatt 15 **Abgabe bis 11.2.02 um 10.00 Uhr**

Aufgabe 1

Seien $v_1 := 5x^4 + x,\ v_2 := x^4 + x^2 + 3x,\ v_3 := 5x^2\ \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[x]_{\leq 4}$.
Bestimmen Sie eine Basis von $<\ v_1,\ v_2,\ v_3\ >$

Aufgabe 2

Seien $A, B \in M_{4,4}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$, $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
Berechnen Sie $A + B$, $A \cdot B$ und $B \cdot A$

Aufgabe 3

Seien $A \in M_{3,2}(\mathbb{R}),\ B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.
Suchen Sie Beispiele für A und B, so dass für die zu $A \cdot B$ gehörige lineare Abbildung $f_{A \cdot B}$ gilt:
$f_{A\cdot B}(e_1),\ f_{A\cdot B}(e_2),\ f_{A\cdot B}(e_3)$
(i) sind linear unabhängig
(ii) sind linear abhängig
(iii) ist Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$

Untersuchen Sie entsprechende Fragen für die Abbildung $F_{B \cdot A}$.

Welche Bedingungen sind nicht erfüllbar?

Bonusaufgabe

a) Sei $f : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ eine Abbildung mit $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$.

i) Geben Sie die Matrix $M(f)$ an.
ii) Geben Sie $kern\ f$ in aufzählender Form an.
iii) Ist f injektiv, ist f surjektiv?

b) Zeigen Sie allgemein: Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Dann ist f injektiv genau dann, wenn $kern\ f = \{o\}$.