

Übungsaufgaben
zur Vorlesung “Lineare Algebra I” für Lehramt

Blatt 16

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 9 \\ 6 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Weisen Sie nach, dass L ein Untervektorraum des $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^4$ ist.

Aufgabe 2

a) Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ folgendes Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ lösbar ist:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 9 \\ 6 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie jeweils die Lösungsmengen L_a an.

c) Vergleichen Sie die Lösungsmengen in Aufgabe 2b) mit der Lösungsmenge in Aufgabe 1a).

d) Weisen Sie nach, ob L_a ein Untervektorraum des $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^4$ ist.

Aufgabe 3

Geben Sie die Anzahl der Lösungen von folgendem Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ in Abhängigkeit von k und h an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & k \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ über dem Körper \mathbb{R} .

a) Von welchem Raum in welchen Raum bildet A ab?

b) Geben Sie $rg A$ und $\dim \text{kern } A$ an.

c) Geben Sie $\text{Bild } A$ und $\text{Kern } A$ an.