Prof. Dr. M. Voit
Dr. P. Becker-Kern

WS 2001/02

Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie)

Blatt 1

Abgabe: bis Donnerstag

Aufgabe 1:

Für eine überabzählbare Menge Ω zeige man:

(a) $\sigma(\{\omega\} : \omega \in \Omega) = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } \Omega \setminus A \text{ höchstens abzählbar}\}$;

(b) $\mu_1(A) := |A|$ oder $\mu_2(A) := \begin{cases} 0 & : \quad A \text{ abzählbar} \\ \infty & : \quad \Omega \setminus A \text{ abzählbar} \end{cases}$
definieren Maße auf der in (a) definierten σ-Algebra;

(c) μ_2 ist nullstetig, μ_1 aber nicht.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Eine Verteilungsfunktion F auf $\mathbb{R}$ ist stetig genau dann, wenn für das assoziierte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathrm{P}(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 3: Unabhängigkeit von σ-Algebren

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ein W'raum. Bekanntlich heißen Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ unabhängig, falls $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$ gilt.
Zwei Mengensysteme $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{A}$ heißen nun unabhängig, falls alle $A \in \mathcal{C}_1$ von allen $B \in \mathcal{C}_2$ unabhängig sind.
Nun seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ unabhängige, $\cap$-abgeschlossene Mengensysteme.
Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : A \text{ unabhängig von allen } B \in \mathcal{C}_2\}$ ist ein Dynkin-System mit $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{D}$;

(b) $\sigma(\mathcal{C}_1)$ und $\sigma(\mathcal{C}_2)$ sind unabhängig.

Aufgabe 4: Die Produkt-σ-Algebra

Es seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i=1,\ldots,n}$ Meßräume und $\Omega := \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ Mengen der Form $A_1 \times \ldots \times A_n$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ heißen dann Zylindermengen.
Zeigen Sie:

(a) Das Mengensystem $\mathcal{C} := \{Z_1 \cup \ldots \cup Z_r : r \in \mathbb{N};\ Z_1, \ldots, Z_r \text{ Zylindermengen}\}$ ist eine Algebra.
Die von $\mathcal{C}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{C})$ heißt Produkt-σ-Algebra und wird mit $\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$ bezeichnet.

(b) Für die Borel-σ-Algebren gilt: $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Vorlesungsankündigung
STOCHASTIK II
(Wahrscheinlichkeitstheorie)

Dozent:	**Prof. Dr. Michael Voit**
Vorlesung:	Dienstag und Freitag, $08^{30} - 10^{00}$ im Raum M/E 28
Vorlesungsbeginn:	Dienstag, den 16.10.2001
Übungen (2-std.):	nach Vereinbahrung.

Aufbauend auf der Vorlesung STOCHASTIK I vermittelt diese Vorlesung einen systematischen Einstieg in die Wahrscheinlichkeitstheorie wie er zum Beispiel zum Verständniss der modernen Entwicklung der Finanzpolitik notwendig ist. Im Zentrum stehen die Methoden der stochastischen Modellbildung und speziell der Konstruktion und Analyse von stochastischen Prozessen. Behandelt werden insbesondere Markov-Prozesse, Levy-Prozesse, Gauss-Prozesse, Poisson-Prozesse und die Brownsche Bewegung. Wichtige Themen sind der zentrale Grenzwertsatz, das starke Gesetz der großen Zahlen, der Birkhoffsche Ergodensatz, das Langzeitverhalten von Markov-Prozessen, Regularitätseigenschaften von Pfaden, Martingale und Stopzeiten.
Die benötigten Grundlagen aus anderen Gebieten (Maß- und Integrationstheorie, Fourieranalyse) werden in der Vorlesung bereitgestellt.

Fortsetzung der Vorlesung im Sommersemester 2002: STOCHASTIK III - Differentialgleichungen und Finanzstochastik (geplant).

Vorlesungsbegleitende Literatur:

H. Bauer:	Wahrscheinlichkeitstheorie - deGruyter, 1993;
P. Bremaud:	Markov Chains, Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues - Springer, 1999;
L. Breiman:	Probability - Addison-Wesley, 1968;
R. Durret:	Probability: Theory and Exampels - Duxbury Press, 1999;
W. Feller:	An Introduction to Probability Theory and its Applications I, II - Wiley, 1950/66;
P. Gänssler, W. Stute:	Wahrscheinlichkeitstheorie - Springer, 1977;
O. Kallenberg:	Foundations of Modern Probability - Springer, 1997.