Prof. Dr. M. Voit
Dr. P. Becker-Kern

WS 2001/02

Stochastik II
(Wahrscheinlichkeitstheorie)

Blatt 2

Abgabe: Dienstag, 30.10.2001

Aufgabe 1:

Geben Sie ein Beispiel eines W'maßes auf $\mathbb{R}$, das weder diskret ist noch eine Lebesgue-Dichte hat.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie für das Lebesgue-Maß λ^d auf $\mathbb{R}^d$:

(a) Für jede offene Menge $U \neq \emptyset$ in $\mathbb{R}^d$ gilt $\lambda^d(U) > 0$.

(b) λ^d ist translationsinvariant, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\lambda^d(A) = \lambda^d(x + A)$ mit $x + A := \{x + y : y \in A\}$.

Aufgabe 3: Regularität endlicher Borel-Maße

Es sei μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Man zeige, daß für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ kompakt}\} \\ &= \inf\{\mu(U) : A \subset U \text{ offen}\} \end{aligned}$$

gilt.

Tip: Zeigen Sie, daß das System der Mengen $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, für die obige Gleichungen gelten, ein Dynkin-System ist.

Aufgabe 4:

Die Verteilungsfunktion eines W'maßes P auf $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ist definiert als $F_P(x_1, \ldots, x_d) := P(]-\infty, x_1] \times \ldots \times]-\infty, x_d])$.

(a) F_P ist in jeder Komponente monoton wachsend und rechtsstetig;

(b) P ist durch F_P eindeutig bestimmt;

(c) Im Falle $d = 2$ gilt für $s_1 \leq t_1, s_2 \leq t_2$:
$F_P(s_1, s_2) + F_P(t_1, t_2) \geq F_P(s_1, t_2) + F_P(t_1, s_2)$.

Aufgabe 5: Eine nicht Borel-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}$.**

(a) Es sei A ein Vertretersystem der Nebenklassen der Untergruppe $\mathcal{H} := \{e^{2\pi i x} : x \in \mathbb{Q}\}$ der multiplikativen Gruppe $T := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Man zeige, daß es kein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathcal{P}(T)$ gibt mit $\mathcal{P}(z \cdot B) = P(B)$ für $z \in T$ und $B \in \mathcal{P}(T)$.
(Tip: Zeige, daß $P(A) = 0$ und $P(A) > 0$ unmöglich sind).

(b) Man konstruiere mit den Ideen aus a) eine nicht Borel-meßbare Teilmenge A von $\mathbb{R}$.