Prof. Dr. M. Voit
Dr. P. Becker-Kern

WS 2001/02

# Stochastik II
# (Wahrscheinlichkeitstheorie)

Blatt 3

**Abgabe:** Dienstag, 06.11.2001

**Aufgabe 1:**

Zeigen Sie:

**(a)** Jede monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-meßbar;

**(b)** Sind $X_1, X_2$ $\mathbb{R}$-wertige (Borel-meßbare) Zufallsvariable, so ist das auch $X_1 + X_2$.

**(c)** Sind $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable (definiert auf einem W'raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$) mit $P(X = Y) = 1$, so haben $X$ und $Y$ die gleichen Verteilungen.

**Aufgabe 2:**

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable mit der gleichen Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

**(a)** Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $\max(X_1, \ldots, X_n)$.

**(b)** Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_{(X_1,\ldots,X_n)} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ von $(X_1, \ldots, X_n)$.

**Aufgabe 3: Die negative Binomialverteilung**

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariabler auf einem W'raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $P(X_n = 1) = p \in ]0, 1[$ und $P(X_n = 0) = 1 - p$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $m \in \mathbb{N}$ setze

$$T_m(\omega) := \min\left\{k \geq 0 : \sum_{i=0}^{m+k} X_i(\omega) = m\right\}$$

falls ein solches $k$ existiert, und $\infty$ sonst.

**(a)** Zeigen Sie, daß $T_m : \Omega \to \{0, 1, \ldots, \infty\}$ eine $\mathcal{B}$ $(\mathbb{R})$-meßbare Zufallsvariable ist mit
$P(T_m = k) = \binom{m+k-1}{k} p^m (1-p)^k = \binom{-m}{k} p^m (p-1)^k$
$(k = 0, 1, \ldots)$ und $P(T_m = \infty) = 0$. Die Verteilung von $T_m$ heißt negative Binomialverteilung mit Indizes $m$ und $p$.

**(b)** Welche Beziehung hat die negative Binomialverteilung zur geometrischen Verteilung?

**Aufgabe 4:**

Es seien $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{N}_0$ unabhängige Zufallsvariable mit den Verteilungen $P_X, P_Y$.

**(a)** Zeigen Sie, daß die Verteilung von $X + Y$ gegeben ist als das Faltungsprodukt $P_X * P_Y$ mit

$$P_X * P_Y(\{k\}) := \sum_{l=0}^{k} P_X(\{l\}) \cdot P_Y(\{k-l\}) (k \in \mathbb{N}_0).$$

**(b)** Bestimmen Sie $B_{n,p} * B_{m,p}$ und $\pi_\lambda * \pi_\varrho$ für Binomial- bzw. Poisson-Verteilungen (mit $n, m \in \mathbb{N}, p \in ]0,1[,\ \lambda, \varrho > 0$).

**(c)** Zeigen Sie für unabhängige geometrisch verteilte Zufallsvariable $G_1, \ldots, G_n$ mit Index $p \in ]0,1[$, daß $G_1 + \ldots + G_n$ negativ binomialverteilt mit Indizes $n$ und $p$ ist. Interpretieren Sie dieses Resultat.