Prof. Dr. M. Voit
Dr. P. Becker-Kern

WS 2001/02

Stochastik II
(Wahrscheinlichkeitstheorie)

Blatt 4

Abgabe: Dienstag, 13.11.2001

Aufgabe 1:
Für unabhängige, $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ bestimme man:

(a) die Dichte der Verteilung von X_1^2.
(b) die Dichte der Verteilung von $X_1^2 + \ldots + X_n^2$.
(Tip: Berechnen Sie die Dichte für $n = 2, 3$ und zeigen Sie dann induktiv den allgemeinen Fall.)

Aufgabe 2:
Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit einer stetigen Verteilungsfunktion F. Überprüfen Sie, daß die Zufallsvariable $F \circ X : \Omega \to [0,1]$ auf $[0,1]$ gleichverteilt ist. Gilt dies auch für unstetige F?

Aufgabe 3:
Es sei $(X_n)_{n\geq 1} \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, P))$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $E(X_n) = E(X_1)$ $(n \in \mathbb{N})$. Man zeige für eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \mathbb{N}_0$ mit $E(T) < \infty$, die unabhängig von $(X_n)_{n\geq 1}$ ist:
$S : \Omega \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \sum\limits_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega)$ ist eine Zufallsvariable mit $E(S) = E(T) \cdot E(X_1)$.

Aufgabe 4: Verzweigungsprozesse und Aussterbewahrscheinlichkeiten

Es sei $(Z_{n,j})_{n,j\geq 1}$ eine Familie unabhängiger, identisch verteilter $\mathbb{N}_0$-wertiger Zufallsvariablen mit Verteilung $\mu \in M^1(\mathbb{N}_0)$ und $N \in \mathbb{N}$.

(a) Überlegen Sie sich, daß die rekursiv definierte Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsvariablen mit $X_0 := N$ und

$$X_{n+1} := \sum_{j=1}^{X_n} Z_{n,j} \quad (n \geq 0)$$

als Modell für ein (unbegrenztes) Zellwachstum dient mit N Zellen zur Zeit 0, wobei sich zu jeder Zeit eine existierende Zelle gemäß der Verteilung μ teilt, und dies unabhängig von der Vergangenheit der Zelle und den anderen vorkommenden Zellen geschieht.
(Dabei stirbt die Zelle ohne Nachkommen mit W'keit $\mu(\{0\}.)$

(b) Bestimmen Sie $E(X_n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ mithilfe von $E(Z_{1,1}) < \infty$.

(c) Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktion $g_{X_n}(z) := E(z^{X_n})$ für $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1, n \geq 0$ mithilfe der Erzeugendenfunktion $g(z) := E(z^{Z_{1,1}})$ von $Z_{1,1}$.

(d) Zeigen Sie, daß $P(X_{n+1} = 0) = g(P(X_n = 0))$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(e) Zeigen Sie, daß für das Ereignis $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = 0\}$ die Gleichung $P(E) = g(P(E))$ gilt.

(f) Bestimmen Sie $P(E)$ für $\mu = \frac{1}{4}\,\delta_0 + \frac{1}{4}\,\delta_1 + \frac{1}{2}\,\delta_2$.