Prof. Dr. M. Voit
Dr. P. Becker-Kern

WS 2001/02

Stochastik II
(Wahrscheinlichkeitstheorie)

Blatt 5

Abgabe: Dienstag, 20.11.2001

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz

(a) einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit Index $p \in]0,1[$;

(b) einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen mit Indizes m und p (vgl. Blatt 3).

Aufgabe 2:

(a) Auf dem W'raum $([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]);\ \lambda|_{[0,1]})$ (λ das Lebesguemaß) betrachte man die Funktionen

$$f_{2^l+k} := 1_{[k2^{-l},(k+1)2^{-l}]} \quad (l \in \mathbb{N},\ k = 0,1,\ldots,2^l-1).$$

Zeigen Sie, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im ersten Mittel gegen 0 konvergiert. Konvergiert die Folge auch fast sicher?

(b) Geben Sie auf dem W'raum aus a) ein Beispiel einer Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsvariablen an, die fast sicher gegen 0 konvergiert, aber nicht im ersten Mittel.

Aufgabe 3: Die n-dimensionale Normalverteilung

(a) Zeigen Sie mit dem Transformationssatz für differenzierbare Transformationen: Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $N(a,\Sigma)$-verteilt mit einer invertierbaren Kovarianzmatrix Σ, und sind $b \in \mathbb{R}^n$ und $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar, so hat die Zufallsvariable $b + BX$ die Verteilung $N(Ba + b,\ B\Sigma\ B^T)$.

(b) Zeigen Sie durch explizites Falten der Dichten, daß für 1-dimensionale Normalverteilungen $N(m_1,\sigma_1^2) * N(m_2,\sigma_2^2) = N(m_1 + m_2,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ gilt.

Aufgabe 4: Gammaverteilungen

(a) Man überprüfe, daß für $\alpha, \nu > 0$ die Gammafunktion

$$\Gamma(\nu) := \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x} dx \in \mathbb{R}$$

wohldefiniert ist und daß

$$f_{\alpha,\nu}(x) := \begin{cases} \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} \cdot x^{\nu-1} e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeige, daß für $\alpha, \mu, \nu > 0$ $f_{\alpha,\nu} * f_{\alpha,\nu} = f_{\alpha,\mu+\nu}$ und

$$\frac{\Gamma(\mu) \cdot \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} = \int_0^1 (1+x)^{\mu-1} x^{\nu-1} dx$$

gilt.

(c) Zeigen Sie: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5:

Zeigen Sie:

(a) Eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann intergrierbar, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) < \infty$ gilt.

(b) Für eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable X gilt

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \in [0, \infty].$$