Prof. Dr. M. Voit
Dr. P. Becker-Kern

WS 2001/02

Stochastik II
(Wahrscheinlichkeitstheorie)

Blatt 6

Abgabe: Dienstag, 27.11.2001

Aufgabe 1:

Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung, und es seien X_i, X $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable. Zeigen Sie: Konvergiert $(X_i)_{i\geq 1}$ gegen X in Verteilung, so konvergiert auch $g(X_i)_{i\geq 1}$ gegen $g(X)$ in Verteilung. Gilt etwas entsprechendes für die fast sichere und stochastische Konvergenz?

Aufgabe 2:

Man zeige für $\lambda > 0$: Die Binomialverteilungen $B_{n,\lambda/n}$ konvergieren schwach gegen die Poisson-Verteilung π_λ.

Aufgabe 3:

Eine Urne enthalte zu Beginn eine schwarze Kugel und keine weiße Kugel. Nach jeder Ziehung aus der Urne (die unabhängig von den vorhergehenden Ziehungen erfolgt) wird die gezogene Kugel zurückgelegt und eine weiße zusätzliche Kugel in die Urne gegeben. Bestimmen Sie die W'keit, daß die schwarze Kugel unendlich oft gezogen wird.

Aufgabe 4:

Ein Stab der Länge 1 fällt auf eine parallele Linienschar mit Abstand L. Die Lage des Stabes wird beschrieben durch die Koordinaten (X, Y) des Mittelpunktes und dem Winkel φ zwischen dem Stab und den Linien. Man nehme an, daß (X, φ) auf $[0, L] \times [0, \pi]$ gleichverteilt sei. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Linien, die der Stab schneidet.

Aufgabe 5:

(a) Zeigen Sie, daß $x \mapsto x \cdot e^{x^2/2}\, N_{0,1}([x, \infty[)$ für $x > 0$ monoton wachsend ist und durch $1/\sqrt{2\pi}$ beschränkt ist.

(b) Für eine unabhängige Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $N_{0,1}$-verteilter Zufallsvariabler und $\varepsilon > 0$ folgere man aus a) und dem Lemma von Borel-Cantelli:

$P(|\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j| \geq \varepsilon$ gilt für unendlich viele n$) = 0$.

Folgern Sie hieraus $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j \to 0$ fast sicher.