Prof. Dr. M. Voit
Dr. P. Becker-Kern

WS 2001/02

Stochastik II
(Wahrscheinlichkeitstheorie)

Blatt 7

Abgabe: Dienstag, 04.12.2001

Aufgabe 1:

Zeigen Sie:

(a) Ist $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear, so gilt für $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$:

$$(T(\mu))\widehat{\ } = \hat{\mu} \circ T^*$$

(dabei ist T^* die adjungierte Abbildung).

(b) Ist X eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt

$$\hat{P}_{cX}(z) = \hat{P}_X(cz) \quad (z \in \mathbb{R}^d).$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Fouriertransformierten folgender Wahrscheinlichkeitsmaße:

(a) der Binomialverteilungen $B_{n,p}$;
(b) der Poisson-Verteilungen π_λ;
(c) der d-dimensionalen Normalverteilungen $N(\mu, \Sigma)$
($\mu \in \mathbb{R}^d, \Sigma \in \mathbb{R}^{d,d}$ positiv semidefiniert);
(d) der Cauchy-Verteilungen γ_α $(\alpha > 0)$ auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3:

Zeigen Sie für $T > 0$, daß $f_T(x) := \dfrac{1 - cosTx}{\pi T x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$ die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ist mit

$$\hat{f}_T(x) = \begin{cases} 1 - |x|/T & |x| \le T \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, daß die folgenden Abbildungen $[0,\infty[\to M^1(\mathbb{R})$ folgenstetig sind bzgl. der schwachen Konvergenz auf $M^1(\mathbb{R})$:

(a) $\sigma^2 \mapsto N(0,\sigma^2)$.

(b) $\alpha \mapsto \gamma_\alpha \quad (\gamma_\alpha$ die Cauchy-Verteilung mit Index $\alpha)$.

(c) $\lambda \mapsto \pi_\lambda$.

Beachte, daß für den Parameter 0 alle obigen Verteilungen per definitionem gleich δ_0 sind.

Aufgabe 5:

Zeigen Sie:

(a) Es sei $\mu \in M^1(\mathbb{R})$ und $r \in \mathbb{N}$.
Existieren alle Momente

$$M_k := \int_{\mathbb{R}^d} x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d} \quad d\mu(x_1,\ldots,x_d)$$

für $k = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{N}_0^d$ und $|k| := k_1+\ldots+k_d \le r$, so existieren die partiellen Ableitungen

$$D_k\ \hat{\mu} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial {x_1}^{k_1} \ldots \partial {x_d}^{k_d}}\ \hat{\mu} \quad (k \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |k| \le r),$$

und sie sind gleichmäßig stetige, beschränkte Funktionen mit

$$D_k\hat{\mu}(x) = (-i)^{|k|} \int e^{-i<x,y>} y_1^{k_1} \ldots y_d^{k_d}\, d\mu(y).$$

(b) Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $r \in \mathbb{N}$.
Ist f r-mal stetig partiell differenzierbar, und gilt $(D_k f)^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für $k \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|k| \le r$, so ist

$$(D_k f)^\wedge\ (x) = i^{|k|} x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d} \cdot \hat{f}(x) \quad (k \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |k| \le r).$$