Prof. Dr. M. Voit
Dr. P. Becker-Kern

WS 2001/02

Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie)

Blatt 8

Abgabe: Dienstag, 11.12.2001

Aufgabe 1:

Für $p \in]0,1[$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Verteilungsfunktion $F_{n,p}$ der Zufallsvariablen $\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\,(S_n - np)$ für eine $B_{n,p}$-verteilte Zufallsvariable S_n.

(a) Bestimmen Sie eine Konstante $C = C(p)$ so, daß

$$\|F_{n,p} - \Phi\|_\infty \leq C/\sqrt{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei ist Φ die Verteilungsfunktion von $N(0,1)$.

(b) Zeigen Sie für die Binomialverteilungen $B_{n,1/2}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4\pi n}\; B_{2n,1/2}\;(\{0\}) = 2$$

(Tip: Stirling-Formel!)
Folgern Sie hieraus, daß

$$\|F_{2n,1/2} - \varphi\|_\infty \geq \tilde{c}/\sqrt{n}$$

für eine Konstante $\tilde{c} > 0$ gilt.

Aufgabe 2:

Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige, $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen mit
$\mathrm{P}_{X_i} = p_i\delta_0 + (1-p_i)\;\delta_1 \quad (i \in \mathbb{N},\, p_i \in [0,1])$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i(1-p_i) = \infty.$$

Zeigen Sie, daß hier der zentrale Grenzwertsatz gilt.

Aufgabe 3: Der d-dimensionale zentrale Grenzwertsatz

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge d-dimensionaler unabhängiger identisch verteilter Zufallsvektoren so, daß die d Komponenten von X_1 quadratintegrierbar sind, und X_1 den Erwartungswert $m \in \mathbb{R}^d$ und die Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d,d}$ hat. Zeigen Sie:
$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - nm\right)$ konvergiert für $n \to \infty$ in Verteilung gegen $N\,(0,\Sigma)$.

Aufgabe 4: Multinomialverteilungen

In einem Experiment mit d möglichen Ausgängen trete der i-te Ausgang mit einer W'keit p_i auf ($p_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{d} p_i = 1$). Bei der n-maligen unabhängigen Wiederholung des Experiments beschreibe die Zufallsvariable A_i^n die Anzahl des Auftretes des i-ten Ausgangs ($i = 1, \ldots, d$).

(a) Verfizieren Sie, daß der Zufallsvektor $A^n = (A_1^n, \ldots, A_d^n)$ $M_{n,d;p_1,\ldots,p_d}$-multinomialverteilt ist.
Zur Erinnerung:

$$M_{n,d;p_1,\ldots,p_d} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^d \,:\, |k|=n} \frac{n! \cdot p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_d^{k_d}}{k_1! \cdots k_d!} \cdot \delta_k \in M^1(\mathbb{R}^d)$$

(b) Bestimmen Sie den Mittelwertvektor $m \in \mathbb{R}^d$ und die Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ von A^1. Zeigen Sie insbesondere, daß Σ die Form

$$\Sigma = DSD$$

hat mit S als symmetrischer Matrix mit dem einfachen Eigenwert 0 und dem $(d-1)$-fachen Eigenwert 1 und $D = Diag(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_d})$ als Diagonalmatrix.

(c) Zeigen Sie, daß der Zufallsvektor

$$\left(\frac{1}{\sqrt{np_i}} \left(A_i^n - np_i\right) \right)_{i=1,\ldots,d}$$

in Verteilung gegen $N(0, \Sigma)$ konvergiert; folgern Sie aus Aufgabe 1 von Blatt 6, daß
$\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{np_i} \left(A_i^n - np_i\right)^2$ in Verteilung gegen die Gammaverteilung $\Gamma_{(d-1)/2,\ 1/2}$ konvergiert.

[**Bemerkung:** Dieses Resultat wird in der Statistik verwendet, um Vertrauensbereiche für einen Test der Gültigkeit der Werte $(p_1, \ldots, p_d)$ bei einem Experiment mit d möglichen Ausgängen zu bestimmen. Da $\Gamma_{(d-1)/2,\ 1/2}$ auch χ^2-Verteilung mit $d-1$ Freiheitsgraden genannt wird, wird der Test auch als χ^2-Test bezeichnet].