UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 12

Abgabe Montag, den 28.1.02, 14 Uhr

54. Sei (z_n) eine komplexe Folge. Man zeige ohne Verwendung von Hilfsmitteln der Vorlesung: (z_n) konvergiert genau dann gegen z_0, wenn

$$\text{Re } z_n \to \text{ Re } z, \quad \text{ und } \text{ Im } z_n \to \text{ Im } z.$$

55. Eine Definition der komplexen Differenzierbarkeit ist die Folgende: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann in z_0 komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0$$

Man formuliere und zeige die Kettenregel für Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit dieser Formulierung der komplexen Differenzierbarkeit.

56. a) Man berechne

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \frac{1}{x^2 + x + 1} \, dx$$

b) Man berechne

$$\lim_{N \to \infty} \int_{0}^{N} \frac{1}{1 + x^3} \, dx$$

c) Man finde eine Stammfunktion in geeigneten Intervallen von

$$\frac{3 \cos x (\sin x)^2}{1 + (\sin x)^2}$$

und

$$\frac{e^x - i}{e^x + i}.$$

57. Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ auf sich selbst sind linear, welche komplex linear, und welche komplex differenzierbar? Hinweis: Man verwende, dass jede der folgenden Abbildungen differenzierbar, aber nicht notwendig komplex differenzierbar ist.

$$\begin{aligned}
f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\qquad f_1(z) := \overline{z}, \\
f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\qquad f_2(z) := \text{ Re } z, \\
f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\qquad f_3(z) = \overline{i\overline{z}}, \\
f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\qquad f_4(z) = \overline{z}z, \\
f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, &\qquad f_5(z) := e^{\text{Re } z} E(\text{ Im } z), \\
f_6 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, &\qquad f_6(z) := |z|^{-2} \overline{z}
\end{aligned}$$