UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 13

Abgabe Montag, den 4.2.02, 14 Uhr

58. Man zeige: Ist die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergent und die Folge (b_n) beschränkt, so ist $\sum a_n b_n$ absolut konvergent.

59. Für welche der folgenden Folgen (a_n) konvergiert $\sum a_n$? Welche Reihen konvergieren absolut?

$$\left(\frac{n+1}{n^4+1}\right), \quad \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right), \quad ((-1)^n/\log(2n)), \quad \left((\log(1+n))^{-3}\right), \quad (1/\sqrt{n^2+1}).$$

60. Sei (a_n) ein reelle Folge, $a_n \geq 0$, $\sum a_n$ konvergiere. Man konstruiere eine reelle monoton fallende Nullfolge (b_n) mit $b_n > 0$ und

$$\sum a_n/b_n$$

konvergent.
Hinweis: Man finde Indizes $k_1 < k_2 \ldots$ mit

$$\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} a_k \leq 2^{-j}.$$

61. Sei $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$.
a. Man zeige: Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx$$

konvergiert für alle n.
b. Konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise? Konvergiert sie gleichmäßig? Man bestimme den Grenzwert f.
c. Man beweise oder widerlege

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$