UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 14

Abgabe Montag, den 11.2.02, 14 Uhr

62. Es sei $\sum a_n$ eine absolut konvergente Reihe, $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$.
a) Man zeige:

$$\sum |a_n|^{1/p} n^{-s}$$

konvergiert für $s > 1/q$.
b) Man gebe ein Beispiel einer absolut konvergenten Reihe $\sum a_n$ an, für die

$$\sum |a_n|^{1/p} n^{-1/q}$$

nicht konvergiert.
Hinweis: Man betrachte zunächst den Fall $p = q = 2$.

63. a) Man zeige:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ für } |x| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ für } |x| < 1$$

b) Man bestimme den Konvergenzradius von $\sum a_n z^n$ wobei

$$a_n = \frac{n^6}{(2n)!}$$

$$a_n = 2.5^n / n^8$$

$$a_n = e^{-n}(1 + n^{10})$$

64. a) Man zeige, daß die Reihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k + \sin^2(kx))^{-x}$$

auf dem Intervall $[c, \infty)$ mit $c > 1$ normal konvergiert.
b) Ist die Konvergenz auf $(1, \infty)$ gleichmäßig?
c) Man zeige: $f \in C^\infty((1, \infty))$.

65. Sei $I = (a, b)$, $m \geq 1$ und $f \in C^m(I)$. Es gelte $f^{(m)}(x) = 1$ für alle $x \in I$. Was kann man über f aussagen?

66. a) Man bestimme die Taylorpolynome von $f(x) := \log(x)$ für $a = 2$ auf dem Intervall $I = (0, \infty)$.
b) Man bestimme den Konvergenzradius der entsprechenden Potenzreihe.
c) Man zeige, daß die Taylorpolynome in einem entprechenden Intervall gegen f konvergieren.

67. Man bestimme alle lokalen Extremalstellen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin x - 2\sin(x/2)$.