UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 4

Abgabe Montag, den 12.11.01, 14 Uhr

16. Man finde den Fehler in der folgenden Argumentation.

Behauptung A: Alle Autos haben dieselbe Farbe.

Dies folgt sofort aus:

Behauptung B: Sei M eine endliche Menge von Autos. Dann haben alle Elemente von M dieselbe Farbe.

Beweis von Behauptung B durch Induktion nach der Anzahl der Elemente von M.
Behauptung B ist offensichtlich wahr für Mengen mit einem Element.
Behauptung B sei wahr für Mengen von n Autos. M sei eine Menge von $n+1$ Autos, die wir durchnummerieren: $M = \{a_1, \dots a_{n+1}\}$. Die Mengen $M_1 = \{a_1, \dots a_n\}$ und $M_2 = \{a_2, \dots, a_{n+1}\}$ haben n Elemente, und, aufgrund der Induktionsvoraussetzung, alle Autos in ihnen dieselbe Farbe. Der Schnitt ist nicht leer, und daher haben alle Autos dieselbe Farbe.

17. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a_0 = a$, $a_1 = b$ und rekursiv $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_n)$ für $n \geq 2$. Man zeige, daß (a_n) konvergiert und bestimme den Limes. Hinweis: Man betrachte zunächst die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$.

18. Sei (a_n) eine konvergente Folge, $a_n \to a$,

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Man zeige: $b_n \to a$.

19. Man gebe Beispiele von Folgen reeller Zahlen (a_n) und (b_n) an mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, so daß jeder der folgenden Fälle eintritt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$,
3. Zu gegebenem $c \in \mathbb{R}$ gelte $\lim a_n b_n = c$,
4. Die Folge $(a_n b_n)$ ist beschränkt, konvergiert aber nicht.

20. Zusatzaufgabe. Man finde eine beschränkte divergente Folge (a_n) mit

$$|a_{n+1} - a_n| \to 0.$$