

UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 6 Abgabe Montag, den 26.11.01, 14 Uhr

26. Man gebe Bedingungen an a, b, c und d an, unter denen die folgenden Formeln definiert sind und beweise die Formeln.

$$\log(a^b) = b \log a, \quad a^{bc} = (a^b)^c, \quad a^b d^b = (ad)^b.$$

27. Man bestimme die Limiten.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^6 + 4n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}).$$

28. Man entscheide, ob die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimme ggf. $\sup M$ und $\inf M$. Weiter entscheide man, ob M ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

$$a) M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 10\}, \quad b) M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 27\},$$
$$c) M = \{1 + \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad d) M = \left\{1 + \frac{1}{n} - 2^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

29. Sei

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Man zeige: f ist stetig.

30a. Die Funktionen $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ seien nach oben beschränkt. Man zeige, daß auch $f + g$ nach oben beschränkt ist und daß gilt

$$\sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

b. Die Folgen (a_n) und (b_n) seien nach oben beschränkt. Man zeige:

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$