UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 7

Abgabe Montag, den 3.12.01, 14 Uhr

31. Man gebe die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit an und entscheide, ob folgende Funktionen gleichmäßig stetig sind.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x):=\sqrt[4]{|x|},$$

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x):=W(|x|+1),$$

$$h:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad h(x):=W(x).$$

Hinweis: Es gilt

$$|x|-|y|=(\sqrt[4]{|x|}-\sqrt[4]{|y|})(\sqrt[4]{|x|}^3+\sqrt{|x|}\sqrt[4]{|y|}+\sqrt[4]{|x|}\sqrt{|y|}+\sqrt[4]{|y|}^3)$$

32a. Man gebe die Definition von

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=c$$

und zeige direkt, daß

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)=1.$$

b. Man verifiziere direkt, daß (a_n) mit

$$a_n=1+1/n \quad \text{für } n\in\mathbb{N}$$

eine Cauchyfolge ist.

33. Sei

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } |x|\geq 1/n \\ 1-n|x| & \text{für } |x|<1/n \end{cases}$$

für $n\in\mathbb{N}$. a) Man zeige, daß die Funktionen f_n stetig sind durch Verifikation der Definition.
b) Man bestimme den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge (f_n).
c) Konvergiert die Folge gleichmäßig? Man begründe die Antwort zweimal, sowohl durch Verifikation bzw. Falsifikation der Definition sowie durch Theorem 11.9 der Vorlesung.

34. Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig mit den Eigenschaften

$$f(x+y)=f(x)f(y) \text{ für } x,y\in\mathbb{R},\ f(0)>0$$

Man zeige: $f(1)>0$ und

$$f(x)=(f(1))^x \quad \text{für } x\in\mathbb{R}.$$

Hinweis: Man betrachte nacheinander $x\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{Q}$ und $x\in\mathbb{R}$.