UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis I, Blatt 9

Abgabe Montag, den 17.12.01, 14 Uhr

39. Man untersuche die Funktionen auf Differenzierbarkeit und bestimme die Ableitungen.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=e^x(1+x^2)$$

$$g:(0,\infty)\to\mathbb{R} \qquad g(x)=\big(\log(1/x)\big)^2$$

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad h(x)=\begin{cases} 1-e^x & \text{für } x<0 \\ 0 & \text{für } x\geq 0\end{cases}$$

$$j:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad j(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } x\leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{für } x> 0\end{cases}$$

40. Es sei $J=(a,b)$ ein offenes Intervall, $f\in C^1(J)$. Man zeige zunächst

$$\varepsilon^{-1}(f(x+\varepsilon)-f(x))\to f'(x) \qquad \text{für } \varepsilon\to 0$$

für alle $x\in J$. Ist die Konvergenz von $h(x):=n(f(x+1/n)-f(x)))$ gegen f' gleichmäßig auf Teilintervallen der Form $I=[\bar{a},\bar{b}]\subseteq J$?

41. Es sei $\gamma>1$ and $c>0$. Die Funktion $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ genüge

$$|f(x)|\leq c|x|^\gamma \qquad \text{für } x\in(-1,1)$$

Man zeige, daß f in $a=0$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

42. Seien $I,J\subseteq\mathbb{R}$ offene Intervalle, $f\in C^4(I)$, $f(I)\subset J$, $g\in C^4(J)$ und $h=g\circ f$. Man drücke h'', h''' und $h^{(4)}$ durch Ableitungen von f und g aus.

43. Man berechne die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x-\log(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^a}-\frac{b}{1-x^b}\right) \qquad \text{wobei } a,b>0$$

44. Das Verhalten des Regelintegrals bezüglich Limiten ist nicht ganz zufriedenstellend. Man gebe eine nichtnegative, beschränkte und stetige Funktion auf dem Intervall $(0,1]$ an, die nicht zu einer Regelfunktion auf $[0,1]$ fortgesetzt werden kann. Weshalb zeigt die Existenz dieser Funktion, daß der zum Regelintegral gehörende Flächenbegriff nicht zufriedenstellend ist?