Musterlösung Analysis I Blatt 1

1. Aufgabe 1

   (a) Das additive und multiplikative Inverse sind eindeutig.
   Eindeutigkeit des additiven Inversen:
   Axiom K4 besagt: Zu $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a+x=0$. Angenommen es gäbe $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a+x=0,\ a+y=0$. Das bedeutet aber:

   $$x \overset{K3}{=} x+0 \overset{K5}{=} 0+x = (a+y)+x \overset{K5}{=} (y+a)+x \overset{K2}{=} y+(a+x) = y+0 \overset{K3}{=} y.$$

   <u>Bemerkung:</u> Das eindeutige additive inverse Element von a wird auch mit $-a$ bezeichnet.

   Eindeutigkeit des multiplikativen Inversen:
   Axiom K9 besagt: Zu $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $ax = 1$. Angenommen es gibt x, y mit $ax = 1$ und $ay = 1$. Dann folgt:

   $$x \overset{K8}{=} x1 = x(ay) \overset{K7}{=} (xa)y \overset{K10}{=} (ax)y = 1y \overset{K10}{=} y1 \overset{K8}{=} y.$$

   <u>Bemerkung:</u> Das eindeutige multiplikative inverse Element von a wird auch mit a^{-1} bezeichnet.

   (b) Man zeige die Formel: $0 = -0$.

   $$\begin{array}{rc} & 0 = 0 \\ \overset{K3}{\Rightarrow} & 0 + 0 = 0 \\ \overset{K4}{\Rightarrow} & 0 \text{ ist ein additives inverses Element zu } 0. \\ \overset{1.(a)}{\Rightarrow} & 0 = -0 \end{array}$$

2. Aufgabe 2
   Zunächst einige Vorüberlegungen (bekannt aus der Globalübung).

   (a) <u>Zeige:</u> $\forall\ b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}:\ b^{-1}c^{-1} = (bc)^{-1}$
   <u>Beweis:</u>

   $$bcb^{-1}c^{-1} \overset{K10}{=} cbb^{-1}c^{-1} \overset{K9}{=} c1c^{-1} \overset{K8}{=} cc^{-1} \overset{K9}{=} 1 \Rightarrow (bc)^{-1} = b^{-1}c^{-1},$$

   da das inverse Element eindeutig bestimmt ist.

   (b) <u>Zeige:</u> $\forall\ d \in \mathbb{R}\backslash\{0\}:\ (d^{-1})^{-1} = d$
   <u>Beweis:</u>

   $$d^{-1}d \overset{K10}{=} dd^{-1} \overset{K9}{=} 1 \Rightarrow (d^{-1})^{-1} = d,$$

   da das inverse Element eindeutig bestimmt ist.

   Nun zur Aufgabe:
   Man beweise die Rechenregeln für reelle Zahlen:

   $$\forall a, b \in \mathbb{R}, c, d \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ gilt:} \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}.$$

Beweis: Sei a,b,c,d wie oben:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{c}+\frac{b}{d} &\overset{K8}{=} 1\frac{a}{c}+1\frac{b}{d} \\
&\overset{K9}{=} \frac{d}{d}\frac{a}{c}+\frac{c}{c}\frac{b}{d} \\
&\overset{Def.}{=} dd^{-1}ac^{-1}+cc^{-1}bd^{-1} \\
&\overset{K10}{=} add^{-1}c^{-1}+bcd^{-1}c^{-1} \\
&\overset{K11}{=} (ad+bc)d^{-1}c^{-1} \\
&\overset{2.(a)}{=} (ad+bc)(dc)^{-1} \\
&\overset{Def.}{=} \frac{ad+bc}{cd}
\end{aligned}$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, c,d \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ gilt:} \frac{a}{c}\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}.$$

Beweis: Sei a,b,c,d wie oben:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{c}\frac{b}{d} &\overset{Def.}{=} ac^{-1}bd^{-1} \\
&\overset{K10}{=} abc^{-1}d^{-1} \\
&\overset{2.(a)}{=} ab(cd)^{-1} \\
&\overset{Def.}{=} \frac{ab}{cd}
\end{aligned}$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R}, c,d \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ gilt:} \frac{a\backslash c}{b\backslash d}=\frac{ad}{bc}.$$

Beweis: Sei a,b,c,d wie oben:

$$\begin{aligned}
\frac{a\backslash c}{b\backslash d} &\overset{Def.}{=} ac^{-1}(bd^{-1})^{-1} \\
&\overset{2.(a)}{=} ac^{-1}b^{-1}(d^{-1})^{-1} \\
&\overset{2.(b)}{=} ac^{-1}b^{-1}d \\
&\overset{K10}{=} adb^{-1}c^{-1} \\
&\overset{2.(a)}{=} ad(bc)^{-1} \\
&\overset{Def.}{=} \frac{ad}{bc}
\end{aligned}$$

3. Aufgabe 3
   Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

   (a) $|5x+3| - |3x-2| \geq 5$
   <u>kritische Punkte</u>:

$$5x + 3 = 0 \Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$$

$$3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

   Wir betrachten nacheinander die Fälle $x < -\frac{3}{5}$, $-\frac{3}{5} \leq x < \frac{2}{3}$ und $\frac{2}{3} \leq x$.
   <u>1.Fall:</u> Sei $x < -\frac{3}{5}$. Es gilt $|5x+3|-|3x-2| = -5x-3-(-3x+2) = -2x-5$ und die obige Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & -2x - 5 \geq 5 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x \leq -10 \\ \Leftrightarrow \quad & x \leq -5. \end{aligned}$$

   Damit gilt die Ungleichung für $x \in \mathbf{L}_1 = (-\infty, -5]$.
   <u>2.Fall:</u> Sei $-\frac{3}{5} \leq x < \frac{2}{3}$. Es gilt: $|5x+3| - |3x-2| = 5x+3-(-3x+2) = 8x+1$. Die obige Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & 8x + 1 \geq 5 \\ \Leftrightarrow \quad & 8x \geq 4 \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

   Damit gilt die Ungleichung für $x \in \mathbf{L}_2 = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$.
   <u>3.Fall:</u> Sei $\frac{2}{3} \leq x$. Dann gilt $|5x+3| - |3x-2| = 5x+3-(3x-2) = 2x+5 \geq 5$ und die obige Ungleichung ist immer erfüllt. Wir erhalten die Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \bigcup \mathbf{L}_3 \bigcup \mathbf{L}_3 = (-\infty, -5] \bigcup [\frac{1}{2}, \infty)$.

   (b) $|2-2x| < 3$. Wegen Formel (2) in Kapitel I.1 der Vorlesung gilt die Ungleichung genau dann, wenn gilt:

$$-3 < 2 - 2x < 3 \Leftrightarrow -5 < -2x < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} > x > -\frac{1}{2},$$

   wobei die letzte Äquivalenz Axiom O und die Tatsache $-(-2) = 2 \in P$ benutzt. Die Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \in \mathbf{L} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ gilt.

   (c) $|2x| > |6-2x|$
   <u>Kritische Punkte:</u>

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

   Wir betrachten nacheinander die Fälle $x < 0$, $0 \leq x < 3$ und $3 \leq x$.
   <u>1.Fall:</u> Sei $x < 0$. Dann gilt $|2x| = -2x$ und $|6-2x| = 6-2x$. Die Ungleichung ist dann äquivalent zu

$$-2x > 6 - 2x \Leftrightarrow 0 > 6$$

   was für kein x erfüllt ist.
   <u>2.Fall:</u> Sei $0 \leq x < 3$. Dann gilt $|2x| = 2x$ und $|6-2x| = 6-2x$. Die Ungleichung gilt genau dann, wenn

$$2x > 6 - 2x \Leftrightarrow 4x > 6 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Damit ist sie für $x \in \mathbf{L}_2 = (\frac{3}{2}, 3)$ erfüllt.

<u>3.Fall:</u> Sei $3 \leq x$. Dann gilt $|2x| = 2x$ und $|6-2x| = -(6-2x) = 2x-6$. Die Ungleichung ist äquivalent zu $2x > 2x - 6 \Leftrightarrow 0 > -6$, was immer erfüllt ist. Also folgt für die Lösungsmenge: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \bigcup \mathbf{L}_3 \bigcup \mathbf{L}_3 = (\frac{3}{2}, \infty)$.

(d) $\frac{1}{x+|x-1|} < 3$
Zunächst überlegen wir uns, daß $x+|x-1| \in P$ ist. Dies ist sicher richtig, falls $x \geq 0$. Ist $x < 0$ so gilt $x + |x-1| = x + 1 - x = 1 \in P$. Nun gilt

$$d) \Leftrightarrow P \ni 3 - \frac{1}{x+|x-1|} = (x+|x-1|)^{-1}(3(x+|x-1|)-1),$$

was wegen der Rechenregel 1.6 (h) unter Axiom O zu

$$3(x+|x-1|) > 1$$

äquivalent ist.
<u>Kritische Punke:</u>

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Wir betrachten nacheinander die Fälle $x < 1$ und $1 \leq x$.
<u>1.Fall:</u> Aus $x < 1$ folgt:

$$\begin{aligned} & |x-1| = -(x-1) = 1-x \\ \Rightarrow \quad & 3(x+|x-1|) = 3(x+1-x) = 3 > 1 \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{L}_1 = (-\infty, 1)$.
<u>2.Fall:</u> Aus $x \geq 1$ folgt:

$$\begin{aligned} & |x-1| = x-1 \\ \Rightarrow \quad & 3(x+x-1) = 6x - 3 \geq 6 - 3 = 3 > 1. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbf{L}_2 = [1, \infty)$ und die Ungleichung gilt für alle $x \in \mathbf{L} = \mathbb{R}$.

4. Aufgabe 4

(a) Man beweise:

$$\forall 0 \leq r < s \text{ gilt: } \frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}$$

Seien r, s wie oben, dann gilt mit der Rechenregel 1.6 (h) und K11:

$$\begin{aligned} & r < s \\ \Rightarrow \quad & r + rs < s + rs \\ \Rightarrow \quad & r(1+s) < s(1+r) \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{r}{1+r} < \tfrac{s}{1+s}. \end{aligned}$$

(b) Man beweise

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt: } \frac{x+y}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Es gilt (mit Aufgabe 2):

$$\begin{aligned} \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} &= \frac{|x|+|y|+2|x||y|}{1+|x|+|y|+|x||y|} \\ &\geq \frac{|x|+|y|+|x||y|}{1+|x|+|y|+|x||y|}, \end{aligned}$$

da $1+|x|+|y|+|x||y| \in P$ und $|x||y| \in P$ ist.
Jetzt kann man Aufgabe 4.(a) verwenden. Dabei ist $r := |x+y|$ und $s := |x|+|y|+|x||y|$. Aufgrund der Dreiecksungleichung ist $s > r$ oder mindestens eine der beiden reellen Zahlen x, y ist gleich 0. Da der zweite Fall einfach ist, nehmen wir an, daß $s > r$ ist. Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{|x|+|y|+|x||y|}{1+|x|+|y|+|x||y|} &\overset{4.(a)}{>} \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \\ &\geq \frac{x+y}{1+|x+y|}. \end{aligned}$$

5. Aufgabe 5
Sei $n \in \mathbf{N}$. Man zeige:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

Man verwendet das Verfahren der vollständigen Induktion.

- Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

- Induktionsschluss ($n \to n+1$): Die Formel (1) gelte für n. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &\overset{I.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$