Musterlösung, Analysis I, Blatt 10

Aufgabe 45

1. Aus $(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = (1-1)+i(1+1) = i2$ folgt $(1+i)^4 = (i2)(i2) = -4$.

   Aus $(1+i\sqrt{3})^2 = (1-3)+i(\sqrt{3}+\sqrt{3}) = -2+i2\sqrt{3}$ erhalten wir $(1+i\sqrt{3})^3 = (-2+i2\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = (-2-6)+i(-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}) = -8$, und somit $(1+i\sqrt{3})^6 = (1+i\sqrt{3})^3(1+i\sqrt{3})^3 = (-8)(-8) = 64$.

   Weiter gilt

   $$\begin{aligned}
   &\left(\frac{2+3i}{1-2i}+\frac{i}{3+i}\right)^{-1} \\
   &= \frac{1}{\frac{2+3i}{1-2i}+\frac{i}{3+i}} = \frac{(1-2i)(3+i)}{(2+3i)(3+i)+i(1-2i)} = \frac{(3+2)+i(-6+1)}{(6-3)+i(9+2)+2+i} \\
   &= \frac{5-i5}{5+i12} = \frac{(5-i5)(5-i12)}{25+144} = \frac{25-60-i(-25-60)}{169} = -\frac{35}{169}-i\frac{85}{169}
   \end{aligned}$$

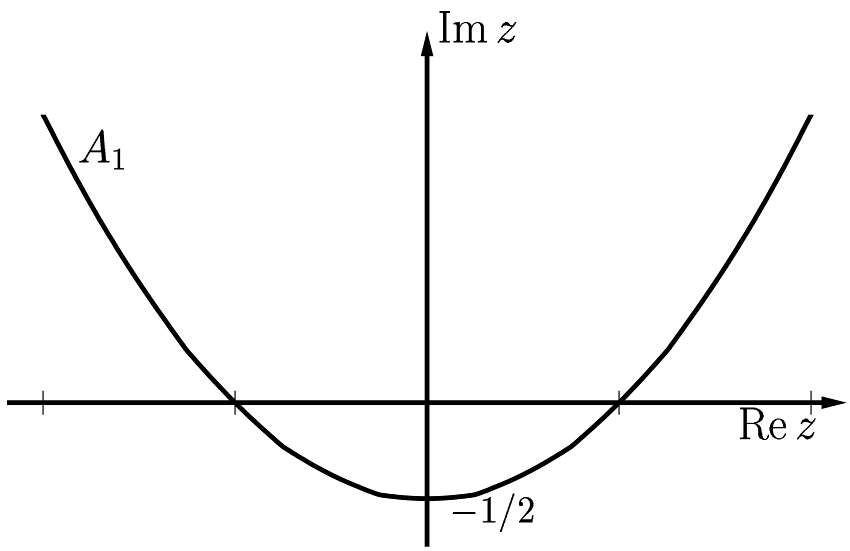
2. Es gilt $(i-1)^2 = (1-1)+i(-1-1) = -2i = 2E(\frac{3}{2}\pi)$. Dies zeigt $-1+i = \sqrt{2}E(\frac{3\pi+2k\pi}{4})$ mit $k \in \{0,1\}$. Wegen $\operatorname{Arg}(-1+i) \in (\pi/2, \pi)$ folgt $-1+i = \sqrt{2}E(\frac{3}{4}\pi)$.

   Aus $(1+i\sqrt{3})^3 = -8$ folgt $(1+i\sqrt{3})^3 = 8E(\pi)$ und somit $1+i\sqrt{3} = \sqrt[3]{8}E(\frac{\pi+2k\pi}{3}) = 2E(\frac{\pi+2k\pi}{3})$ mit $k \in \{0,1,2\}$. Aus $\operatorname{Arg}(1+i\sqrt{3}) \in (0,\pi/2)$ folgt also $1+i\sqrt{3} = 2E(\frac{\pi}{3})$.

Aufgabe 46 Wir untersuchen zunächst die Menge A_1. Sei $z \in A_1$. Dann gilt $|z| = \operatorname{Im} z + 1$ und somit $\operatorname{Im} z \geq -1$. Außerdem gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z \geq -1$:

$$\begin{aligned}
|z| = \operatorname{Im} z + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = (\operatorname{Im} z + 1)^2 \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z)^2 = 2\operatorname{Im} z + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{Im} z = \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{2} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

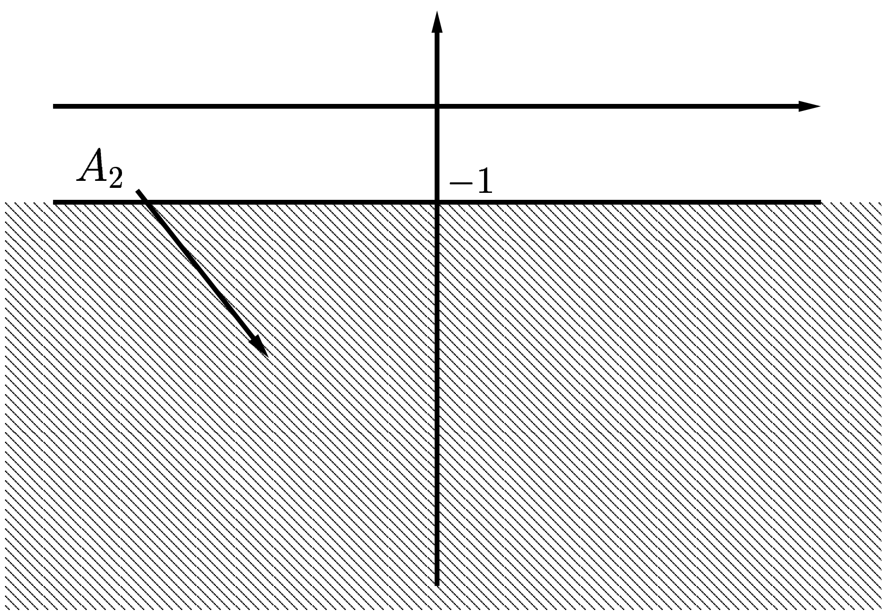
Dies zeigt $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{2} - \frac{1}{2}\}$. Somit sieht A_1 wie folgt aus:



Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\, iz \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\, i(\mathrm{Re}\, z + i\mathrm{Im}\, z) \geq 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(-\mathrm{Im}\, z + i\mathrm{Re}\, z) \geq 1 \Leftrightarrow -\mathrm{Im}\, z \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\, z \leq -1\end{aligned}$$

A_2 läßt sich somit wie folgt skizzieren:



Aufgabe 47

1. Die Funktionen $z \mapsto 1 - z$ und $z \mapsto 1 + z$ sind stetig. Wegen $1 + z \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ ist auch f auf $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ als Komposition dieser Funktionen stetig.

f ist auch injektiv, da aus $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1-z_1}{1+z_1} = \frac{1-z_2}{1+z_2} \quad &\Leftrightarrow \quad (1-z_1)(1+z_2) = (1-z_2)(1+z_1) \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - z_1 + z_2 - z_1 z_2 = 1 - z_2 + z_1 - z_1 z_2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2z_2 = 2z_1 \Leftrightarrow z_1 = z_2.
\end{aligned}$$

2. Wir zeigen zunächst: $f(\mathbb{C}\backslash\{-1\}) = \mathbb{C}\backslash\{-1\}$.

   Annahme: Es existiert $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ mit $f(z) = -1$. Dies würde implizieren $-1 - z = 1 - z \Leftrightarrow -1 = 1$, und somit ist unsere Annahme falsch. Es gilt also $f(\mathbb{C}\backslash\{-1\}) \subset \mathbb{C}\backslash\{-1\}$.

   Sei nun $y \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ beliebig. Wir definieren $z := \frac{1-y}{1+y}$ und erhalten

$$f(z) = \frac{1 - \frac{1-y}{1+y}}{1 + \frac{1-y}{1+y}} = \frac{1 + y - 1 + y}{1 + y + 1 - y} = y.$$

   Dies zeigt $f(\mathbb{C}\backslash\{-1\}) = \mathbb{C}\backslash\{-1\}$.

   Hieraus folgt auch bereits, dass $f : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ bijektiv ist (Die Injektivität wurde in Teil 1 gezeigt) und dass

$$f^{-1}(y) = \frac{1-y}{1+y}.$$

   Somit haben wir Teil 3 hier schon mitbewiesen.

   Für $z \in S_1(0)\backslash\{-1\}$ gilt $|z| = 1$, und somit

$$\begin{aligned}
f(z) \quad &= \quad \frac{1-z}{1+z} = \frac{1 - \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z}{1 + \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z} = \frac{(1 - \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z)(1 + \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z)}{(1 + \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z)(1 + \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z)} \\
&= \quad \frac{1 - |z|^2 - i2\operatorname{Im} z}{1 + |z|^2 + 2\operatorname{Re} z} = -i\frac{\operatorname{Im} z}{1 + \operatorname{Re} z}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

   Daraus folgt $f(S_1(0)\backslash\{-1\}) \subset i\mathbb{R}$. Wir zeigen nun $f(S_1(0)\backslash\{-1\}) = i\mathbb{R}$. Sei $y \in i\mathbb{R}$ beliebig. Somit gilt $\overline{y} = -y$ und

$$|f^{-1}(y)|^2 = \left|\frac{1-y}{1+y}\right|^2 = \frac{1-y}{1+y}\frac{1+y}{1-y} = 1.$$

   Dies beweist $f(S_1(0)\backslash\{-1\}) = i\mathbb{R}$.

   Für $z \in K_1(0)$ gilt $|z| < 1$, und somit (unter Benutzung von (1))

$$\operatorname{Re} f(z) \quad = \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1 - |z|^2 - i2\operatorname{Im} z}{1 + |z|^2 + 2\operatorname{Re} z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2 + 2\operatorname{Re} z} > 0.$$

Daraus folgt $f(K_1(0)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Wir zeigen nun $f(K_1(0)) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Sei $y \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} y > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|f^{-1}(y)|^2 &= \left|\frac{1-y}{1+y}\right|^2 = \frac{1-y}{1+y}\frac{1-\bar{y}}{1+\bar{y}} \\
&= \frac{1-\operatorname{Re} y - i\operatorname{Im} y}{1+\operatorname{Re} y + i\operatorname{Im} y}\,\frac{1-\operatorname{Re} y + i\operatorname{Im} y}{1+\operatorname{Re} y - i\operatorname{Im} y} \\
&= \frac{1-2\operatorname{Re} y + (\operatorname{Re} y)^2 + (\operatorname{Im} y)^2}{1+2\operatorname{Re} y + (\operatorname{Re} y)^2 + (\operatorname{Im} y)^2} \\
&= 1 - \frac{4\operatorname{Re} y}{1+2\operatorname{Re} y + (\operatorname{Re} y)^2 + (\operatorname{Im} y)^2} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Dies beweist $f(K_1(0)) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Aufgabe 48 Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0, da

$$|a_n| = \frac{|-i^n|}{|1+in|} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Es gilt

$$|b_n| = \frac{|e^n|}{|2+2i|^n} = \left(\frac{e}{\sqrt{8}}\right)^n.$$

Laut Vorlesung gilt

$$e \leq \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{49}{18},$$

und somit

$$e^2 \leq \frac{49^2}{18^2} = \frac{2401}{324} \leq \frac{2430}{324} = \frac{15}{2} < 8.$$

Dies impliziert

$$|b_n| = \left(\frac{e}{\sqrt{8}}\right)^n \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

und es folgt, dass (b_n) gegen 0 konvergiert.

Abschließend betrachten wir die Folge (c_n):

$$c_n = 2^{-n}[E(\frac{2\pi}{5})^n - 1]^n = 2^{-n}[\cos(\frac{2\pi n}{5}) + i\sin(\frac{2\pi n}{5}) - 1]^n.$$

Somit gilt

$$|c_n|^2 = 4^{-n}[(\cos(\frac{2\pi n}{5}) - 1)^2 + (\sin(\frac{2\pi n}{5}))^2]^n = \left(\frac{1-\cos(\frac{2\pi n}{5})}{2}\right)^n.$$

Aus $1-\cos(\frac{2\pi n}{5}) \in \{0, 1-\cos(\frac{2\pi}{5}), 1-\cos(\frac{4\pi}{5}), 1-\cos(\frac{6\pi}{5}), 1-\cos(\frac{8\pi}{5})\}$, $n \in \mathbb{N}$, und $|1-\cos(\frac{2\pi}{5})|, |1-\cos(\frac{4\pi}{5})|, |1-\cos(\frac{6\pi}{5})|, |1-\cos(\frac{8\pi}{5})| < 2$ folgt, dass $(|c_n|^2)$ gegen 0 konvergiert. Somit konvergiert auch (c_n) gegen 0 konvergiert.