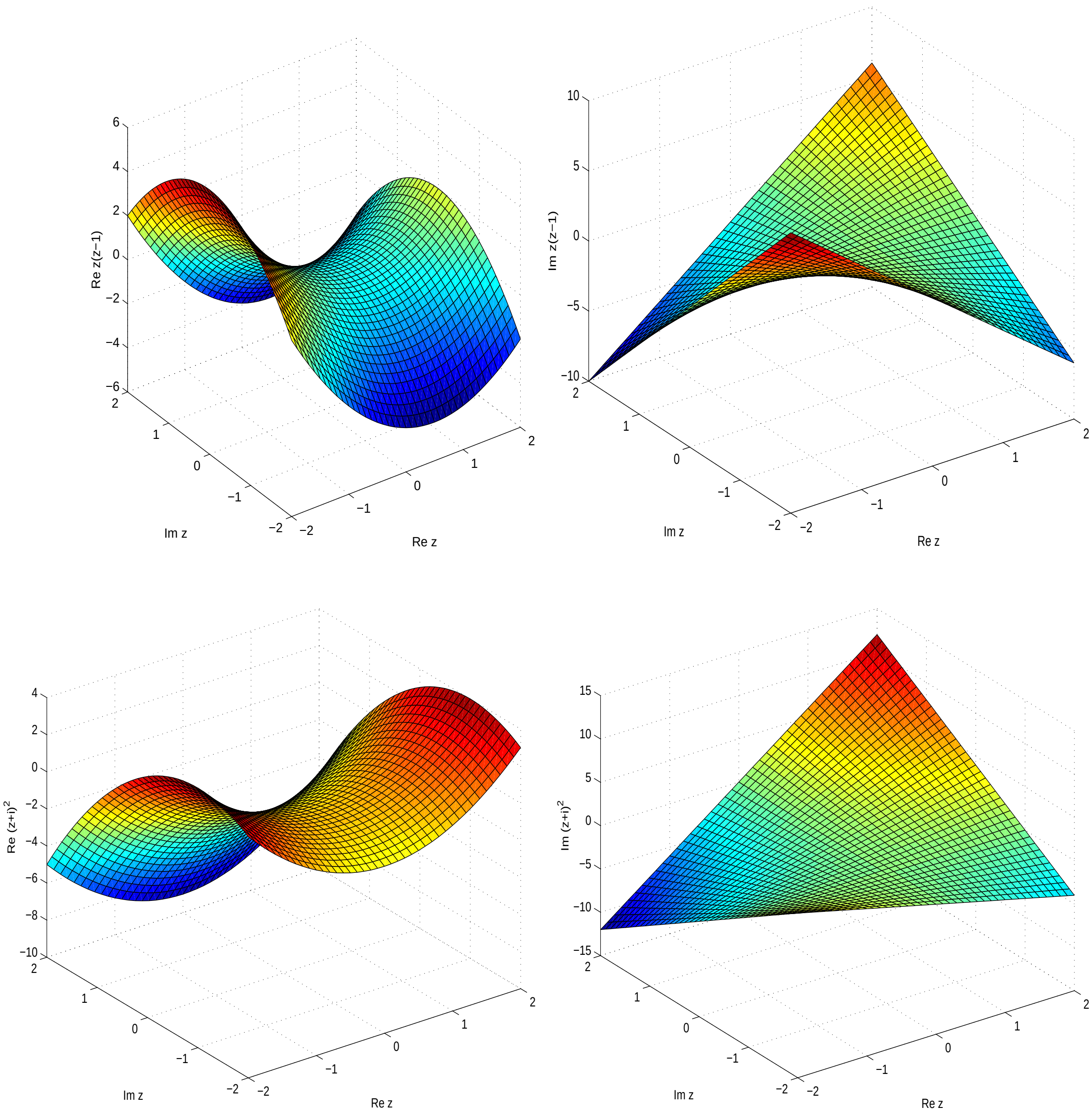
Musterlösung, Analysis I, Blatt 11

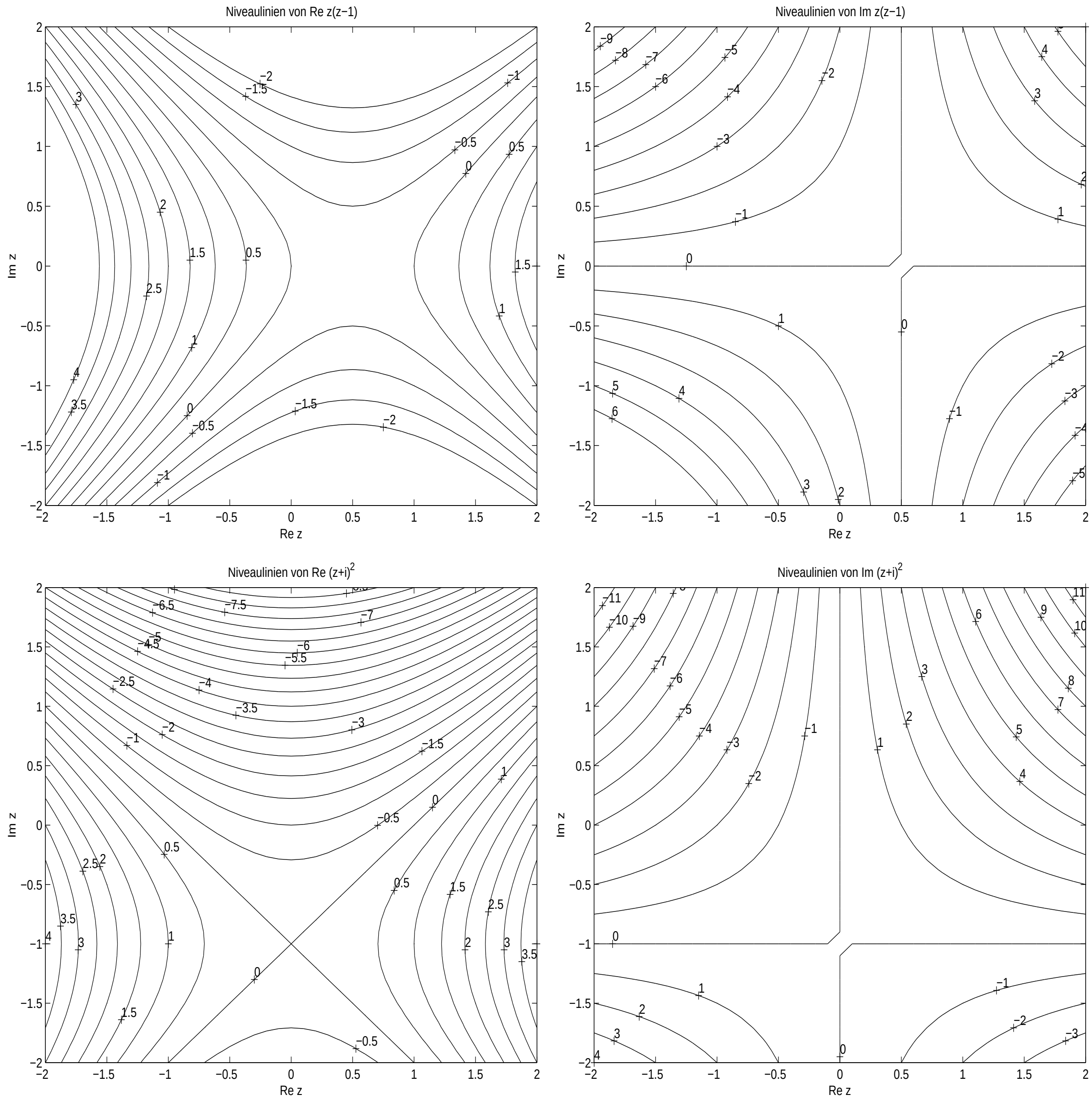
Aufgabe 49 Es gilt zunächst (wobei $x = Re(z)$ und $y = Im(z)$ gelte):

$$Re\ p(z) = x^2 - y^2 - x,\ Im\ p(z) = 2xy - y$$
$$Re\ q(z) = x^2 - y^2 - 2y - 1,\ Im\ q(z) = 2xy + 2x.$$

Betrachten wir zunächst eine dreidimensionale Darstellung der Real- und Imaginärteile:



Desweiteren kann man die Niveaulinien der Real- und Imaginärteile zur Veranschaulichung heranziehen:



Aufgabe 50

a) Man erhält die folgenden Zerlegungen:

$$p_1(z) = (z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z^1 + 1)(z-1) + 0,$$
$$p_2(z) = (z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 4z + 5)(z-1) + 6,$$
$$p_3(z) = (3z^5 - 3z^4 + 3z^2 - 3z)(z^2 + z + 1) + 3z.$$

b)

- Es gilt (siehe a)): $p_1(z) = p_2(z)(z-1)$, d.h. p_1 hat die Nullstelle 1 und sämtliche Nullstellen von p_2. Es reicht also die Nullstellen von p_2 zu bestimmen.
- Betrachten wir nocheinmal p_1, so sehen wir das $p_1(-z) = p_1(z)$ gilt, d.h. mit z_0 ist auch $-z_0$ eine Nullstelle von p_1. Da 1 Nullstelle von p_1 ist, muß auch -1 Nullstelle von p_1 und damit auch von p_2 sein. Abdividieren von $z+1$ ergibt dann
$$p_2(z) = (z^4 + z^2 + 1)(z+1).$$
- Wir müssen nun also die Nullstellen von z^4+z^2+1 bestimmen. Setzen wir dazu $w := z^2$. Wir erhalten dann die Gleichung $w^2+w+1 = 0$. Diese ist äquivalent zu der Gleichung $(w+\frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$. Wegen $-\frac{3}{4} = (\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$ sind die Lösungen dieser Gleichung $w_\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Wir bestimmen nun die z mit $z^2 = w_+$ bzw. $z^2 = w_-$. Betrachten wir zunächst die erste Gleichung. Wie man leicht nachrechnet gilt $(w_-)^2 = w_+$, also sind $z_1 = w_-$ und $z_2 = -w_-$ die 2 Lösungen der Gleichung $z^2 = w_+$. Ebenso sieht man, daß $z_3 = w_+$ und $z_4 = -w_+$ die Lösungen von $z^2 = w_-$ sind.
- Zusammenfassend gilt also, daß p_2 folgende Nullstellen hat:
$$-1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, +\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$
p_1 hat zusätzlich noch die Nullstelle 1.

Aufgabe 51

- Ausdividieren ergibt zunächst
$$\frac{2x^5}{x^2-3x+2} = 2x^3 + 6x^2 + 14x + 30 + \frac{62x-60}{x^2-3x+2}$$
Aus $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ erhalten wir den folgenden Ansatz:
$$\frac{62x-60}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x - A - 2B}{(x-2)(x-1)}.$$
Ein Koeffizientenvergleich führt also zu dem folgenden Gleichungssystem für A und B:
$$\begin{array}{rrl} A & +B & = 62 \\ -A & -2B & = -60 \end{array}$$
Man erhält als Lösung $A = 64$ und $B = -2$. Insgesamt hat man also
$$\frac{2x^5}{x^2-3x+2} = 2x^3 + 6x^2 + 14x + 30 + \frac{64}{x-2} - \frac{2}{x-1}$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ erhält man folgende Stammfunktion:

$$\int \frac{2x^5}{x^2-3x+2}dx = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 30x + 64\log|x-2| - 2\log|x-1| + C.$$

- Wir dividieren zunächst aus und erhalten

$$\frac{x^5}{(x^2-4)^2} = x + \frac{8x^3-16x}{x^4-8x^2+16}.$$

Aus $x^4 - 8x^2 + 16 = (x-2)^2(x+2)^2$ ergibt sich der Ansatz

$$\frac{8x^3-16x}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt in diesem Fall zu dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrl} A & & +C & & = 8 \\ 2A & +B & -2C & +D & = 0 \\ -4A & +4B & -4C & -4D & = -16 \\ -8A & +4B & +8C & +4D & = 0 \end{array}$$

Die Lösung ist gegeben durch $A = 4$, $B = 2$, $C = 4$ und $D = -2$. Man erhält so insgesamt

$$\frac{x^5}{(x^2-4)^2} = x + \frac{4}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{4}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$ erhält man folgende Stammfunktion:

$$\int \frac{x^5}{(x^2-4)^2}dx = \frac{1}{2}x^2 + 4\log|x-2| - \frac{2}{x-2} + 4\log|x+2| + \frac{2}{x+2} + C.$$

Aufgabe 52

- $\sqrt{x}$ ist auf dem Intervall $(0,\infty)$ definiert. Dort berechnen wir eine Stammfunktion durch

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

- Die Funktion $e^{\sqrt{x}}$ ist auf $(0,\infty)$ definiert. Zur Berechnung einer Stammfunktion auf diesem Intervall benutzen wir die Substitutionsregel. Sei dazu $y = g(x) = \sqrt{x}$. Dann ist g differenzierbar mit $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}$ und es gilt

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^y 2y dy$$

Benutzen wir nun partielle Integration, so erhalten wir

$$\int e^y 2y dy = e^y 2y - 2\int e^y dy = 2e^y(y-1) + C.$$

Benutzen wir nun wieder die Substitution $y = g(x)$, so ergibt sich

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C.$$

- Der Integrand ist wieder auf dem Intervall $(0, \infty)$ definiert. Wir benutzen die Substitutionsregel. Sei $y = g(x) = x \log x$. Dann ist g differenziebar auf $(0, \infty)$ mit $g'(x) = \log x + x\frac{1}{x} = 1 + \log x$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int x^x(1+\log x)dx &= \int e^{x\log x}(1+\log x)dx \\ &= \int e^y dy = e^y + C = e^{x\log x} + C = x^x + C.\end{aligned}$$

Aufgabe 53 Wir beweisen zunächst eine Abschätzung, die im Beweis an zwei Stellen gebraucht wird:

Lemma Es seien $0 < a < b$ und $c < d$. Dann gilt

$$D := \sup\{y^s | a \leq y \leq b,\ c \leq s \leq d\} < \infty.$$

Beweis des Lemmas: Es gilt $y^s = e^{s\log y}$ und für das Argument $s\log y$ haben wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} s\log y \leq |s\log y| = |s||\log y| &\leq (\sup_{c\leq s\leq d}|s|)|\log y| \\ &\leq (\sup_{c\leq s\leq d}|s|)(\sup_{a\leq y\leq b}|\log y|) =: C < \infty.\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, daß die Funktionen $\alpha(s) = s$ bzw. $\beta(y) = \log y$ auf den *kompakten* Intervallen $[c,d]$ bzw. $[a,b]$ stetig und damit beschränkt sind. Da die Exponentialfunktion monoton steigend ist, gilt dann aber auch

$$y^s = e^{s\log y} \leq e^C < \infty.$$

□

Kommen wir nun zum Beweis der eigentlichen Aussage.

- Sei $x > 0$ fest. Wir berechnen zunächst den Differenzenquotienten von g in x. Sei dazu $h_0 > 0$ so gewählt, daß $(x - h_0, x + h_0) \subset (0, \infty)$ gilt. Für $|h| \leq h_0$ haben wir

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_1^{x+h}(x+h)^t f(t)dt - \int_1^x x^t f(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(x+h)^t f(t)dt + \int_1^x \frac{(x+h)^t - x^t}{h} f(t)dt. \quad (1)\end{aligned}$$

- Behandeln wir zunächst das erste Integral in (1). Wir zeigen, daß

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(x+h)^t f(t)dt = x^x f(x)$$

gilt. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall $h \to 0^+$. Für $0 < h \le h_0$ haben wir die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(x+h)^t f(t)dt - x^x f(x)\right| &\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|(x+h)^t f(t) - x^x f(x)|dt\\ &\le \sup_{x\le t\le x+h}|(x+h)^t f(t) - x^x f(x)| \qquad (2)\end{aligned}$$

Um den Ausdruck $|(x+h)^t f(t) - x^x f(x)|$ geeignet abschätzen zu können, benutzen wir zunächst die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}&|(x+h)^t f(t) - x^x f(x)|\\ &\quad\le|(x+h)^t f(t) - x^t f(t)| + |x^t f(t) - x^x f(t)| + |x^x f(t) - x^x f(x)|\\ &\quad\le C(|(x+h)^t - x^t| + |x^t - x^x|) + |x^x||f(t) - f(x)|,\end{aligned} \qquad (3)$$

wobei

$$C := \sup_{x\le t\le x+h_0}|f(t)| < \infty$$

ist, da f stetig auf dem kompakten Intervall $[x, x+h_0]$ ist. Wenden wir nun auf den Ausdruck $|(x+h)^t - x^t|$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so erhalten wir ein ξ mit $x < \xi < x+h$ und

$$|(x+h)^t - x^t| = |t||\xi^{t-1}||(x+h) - x| \le D|t||h| \le D(x+h_0)|h|. \qquad (4)$$

Dabei ist

$$D := \sup\{\xi^{t-1}|x < \xi < x+h_0,\ x < t < x+h_0\} < \infty$$

nach dem Lemma. Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto x^t$ und f im Punkt x gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta_1 > 0$ mit

$$|x^t - x^x| < \frac{\epsilon}{C} \text{ und } |f(t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{|x^x|} \qquad (5)$$

für alle $x \le t \le x+\delta_1$. Setzen wir nun $\delta := \min\{\delta_1, \frac{\epsilon}{D(x+h_0)}\}$, so gilt für alle $0 \le h < \delta$ und $x \le t \le x+h$ wegen (3), (4) und (5)

$$|(x+h)^t f(t) - x^x f(x)| < 3\epsilon.$$

Aus (2) folgt also

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(x+h)^t f(t)dt = x^x f(x).$$

Die entschprechende Aussage für $h \to 0^-$ zeigt man völlig analog.

- Behandeln wir nun das zweite Integral in (1) und zeigen, daß

$$\lim_{h\to 0}\int_1^x \frac{(x+h)^t - x^t}{h} f(t)dt = \int_1^x t x^{t-1} f(t)dt$$

gilt. Wir betrachten zunächst wieder nur den Fall $h > 0$. Desweiteren wird ohne Einschränkung angenommen, daß $x \geq 1$ gilt. Der Fall $x < 1$ kann völlig analog behandelt werden. Zunächst hat man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|\int_1^x \frac{(x+h)^t - x^t}{h} f(t)dt - \int_1^x t x^{t-1} f(t)dt\right| & \\ \leq & C \int_1^x \left|\tfrac{(x+h)^t - x^t}{h} - t x^{t-1}\right| dt \\ \leq & C(x-1)\sup_{1\leq t\leq x}\left|\tfrac{(x+h)^t - x^t}{h} - t x^{t-1}\right|. \end{aligned} \tag{6}$$

Man wendet nun zweimal den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an und erhält so zunächst ein $\xi \in (x, x+h)$ und dann ein $\eta \in (x, \xi)$ mit

$$\begin{aligned} \left|\frac{(x+h)^t - x^t}{h} - t x^{t-1}\right| &= |t\xi^{t-1} - t x^{t-1}| = |t||t-1||\eta^{t-2}|(\xi - x) \\ &\leq x(x-1)\tilde{D}h. \end{aligned} \tag{7}$$

Die letzte Abschätzung gilt wieder aufgrund des Lemmas und wegen $x \geq 1$. Zu $\epsilon > 0$ wähle man nun $\delta := \frac{\epsilon}{C\tilde{D}x(x-1)^2} > 0$ und man hat für alle $0 < h < \delta$ wegen (6) und (7)

$$\left|\int_1^x \frac{(x+h)^t - x^t}{h} f(t)dt - \int_1^x t x^{t-1} f(t)dt\right| < C(x-1)\tilde{D}|h| < \epsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung.