Musterlösung, Analysis I, Blatt 12

Aufgabe 54

Konvergenz in $\mathbb{C}$ bedeutet gemäß der Definition aus der Vorlesung:

$$z_n \longrightarrow z \qquad :\Longleftrightarrow \qquad |z_n - z| \longrightarrow 0$$

Wegen $|z| := \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2}$ ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} z_n \longrightarrow z \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(\text{Re } z_n - z)^2 + (\text{Im } z_n - z)^2} \longrightarrow 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \underbrace{(\text{Re } z_n - z)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(\text{Im } z_n - z)^2}_{\geq 0} \longrightarrow 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{Re } z_n - z \longrightarrow 0 \qquad \text{und} \qquad \text{Im } z_n - z \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

woraus sich wegen $\text{Re } z + \tilde{z} = \text{Re } z + \text{Re } \tilde{z}$ sowie $\text{Im } z + \tilde{z} = \text{Im } z + \text{Im } \tilde{z}$ die Behauptung ergibt. Wir zeigen nun noch die folgende Aussage:

$$z_n \text{ konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z_n \text{ ist eine Cauchyfolge}$$

Hierzu betrachten wir zunächst die Richtung „ $\Longleftarrow$ “: Es gilt (analog für den Imaginärteil)

$$|\text{Re } z_n - \text{Re } z_m| = |\text{Re } (z_n - z_m)| \leq \sqrt{(\text{Re } (z_n - z_m))^2 + (\text{Im } (z_n - z_m))^2} = |z_n - z_m|$$

Also bilden die Real- und Imaginärteile ebenfalls eine Cauchyfolge (reell) und konvergieren daher. Aus der zuvor bewiesenen Aussage folgt somit die Konvergenz von z_n. Für die Rückrichtung ist nichts zu zeigen, da eine konvergente Folge immer eine Cauchyfolge ist. Wer das explizit noch einmal nachrechnen möchte betrachte

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m|$$

Aufgabe 55

Es seien $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen, g in a komplex differenzierbar, sowie f in $b := g(a)$ komplex differenzierbar. Dann ist auch die Verkettung $h := f \circ g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ in a komplex differenzierbar mit der Ableitung $h'(a) = f'(b)g'(a)$.

Beweis: Seien f und g differenzierbar wie oben angegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\frac{|f(g(z)) - f(g(a)) - f'(g(a))g'(a)(z-a)|}{|z-a|} \\ &\quad = \frac{|f(g(z)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(z) - g(a)) + f'(g(a))(g(z) - g(a) - g'(a)(z-a))|}{|z-a|} \\ &\quad \leq \frac{|f(g(z)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(z) - g(a))|}{|z-a|} + |f'(g(a))| \frac{|g(z) - g(a) - g'(a)(z-a)|}{|z-a|} \end{aligned}$$

Der zweite Term konvergiert wegen der Differenzierbarkeit von g in a gegen 0. Der erste Term ist für $g(z) = g(a)$ identisch 0, und ansonsten gilt

$$\begin{aligned} &\frac{|f(g(z)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(z) - g(a))|}{|z-a|} \\ &\quad = \frac{|f(g(z)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(z) - g(a))|}{|g(z) - g(a)|} \cdot \frac{|g(z) - g(a)|}{|z-a|} \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$0 \leq \left| \frac{|g(z)-g(a)|}{|z-a|} - |g'(a)| \right| \underset{mod.\triangle-Ungl.}{\leq} \frac{|g(z)-g(a)-g'(a)(z-a)|}{|z-a|} \underset{z\to a}{\longrightarrow} 0$$

Also gilt $\lim\limits_{z\to a} \frac{|g(z)-g(a)|}{|z-a|} = |g'(a)|$ und speziell folgt auch die Stetigkeit von g in a. Verwendet man dies zusammen mit der Differenzierbarkeit von f in $b = g(a)$ folgt auch die Konvergenz des ersten Termes gegen 0.

Aufgabe 56

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{dx}{x^2+x+1} &= \lim_{N\to\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\Bigg(\underbrace{\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}N+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\longrightarrow\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}N+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{\longrightarrow-\frac{\pi}{2}}\Bigg) \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Wir geben nun noch eine Alternative zur Berechnung des obigen Integrals mittels einer komplexen Partialbruchzerlegung an. Hierzu gilt zunächst

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

und der Ansatz

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{A}{x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{B}{x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(A+B)\,x+\frac{1}{2}(A+B)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(B-A)}{x^2+x+1}$$

ergibt mittels Koeffizientenvergleich

$$A+B=0 \qquad\qquad \frac{1}{2}(A+B)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(B-A)=1$$

also $A=\frac{1}{\sqrt{3}}i$, $B=-\frac{1}{\sqrt{3}}i$. Nun kann man mittels 28.9(d) aus dem Buch von Kaballo eine Stammfunktion ermitteln, die sich natürlich als die obige erweist.

b) Es gilt zunächst $1+x^3=(x+1)\left(x^2-x+1\right)=(x+1)\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)$. Wir wenden daher zunächst die Methode der Partialbruchzerlegung (PBZ) an:

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{(A+B)\,x^2+(-A+B+C)\,x+(A+C)}{1+x^3}$$

Ein Koeffizientenvergleich des Zählers liefert somit

$$A+B=0 \qquad -A+B+C=0 \qquad A+C=1$$

die, wie man leicht nachrechnet erfüllt werden durch $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$ und $C=\frac{2}{3}$. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+x^3} &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{dx}{1+x^3} &= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^N \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Auch hier hätte man alternativ mit einer komplexen PBZ arbeiten können (vgl. (a)).

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{3\cos(x)\left(\sin(x)\right)^2}{1+\left(\sin(x)\right)^2}dx &\underset{y:=\sin(x)}{=} \int \frac{3y^2}{1+y^2}dy=\int 3-\frac{3}{1+y^2}dy \\
&= 3y-3\arctan(y)+C \\
&= 3\sin(x)-3\arctan\left(\sin(x)\right)+C
\end{aligned}$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Desweiteren gilt

$$\frac{e^x-i}{e^x+i}=\frac{\left(e^x-i\right)^2}{\left(e^x+i\right)\left(e^x-i\right)}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}-\frac{2e^x}{e^{2x}+1}\cdot i$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx &\underset{y:=e^{2x}}{=} \int \frac{y-1}{y+1}\cdot\frac{1}{2y}dy \underset{PBZ}{=} \frac{1}{2}\int \frac{2}{y+1}-\frac{1}{y}dy=\ln|y+1|-\frac{1}{2}\ln|y|+C_1 \\
&= \ln\left(e^{2x}+1\right)-x+C_1 \\
\int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}dx &= 2\arctan\left(e^x\right)+C_2
\end{aligned}$$

wobei C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind. Insgesamt ergibt sich also

$$\int \frac{e^x-i}{e^x+i}dx=\ln\left(e^{2x}+1\right)-x+C_1+\left(2\arctan\left(e^x\right)+C_2\right)\cdot i$$

Es ergeben sich in keinem der beiden Fällen Einschränkungen an die Definitionsmenge der Stammfunktionen.

Aufgabe 57

Eine Funktion $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt (komplex) linear, falls die beiden folgenden Bedingungen gelten:

1. $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$, für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2. $F(z_1 \cdot z_2) = z_1 \cdot F(z_2)$, für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Dies ist wegen $F(z) = F(z \cdot 1) = z \cdot F(1)$ auch äquivalent zu

3. Es existiert ein $a \in \mathbb{C}$ mit $F(z) = a \cdot z$

Anhand der Definition der komplexen Differenzierbarkeit erkennt man sofort, daß ein derartiges komplex lineares F auch komplex differenzierbar ist, mit der komplexen Ableitung a. Faßt man nun eine allgemeine Funktion $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ auf, so gilt (die partiellen Ableitungen werden mit einem unteren Index gekennzeichnet)

$$F \text{ ist komplex differenzierbar} \iff \begin{array}{c} F \text{ ist reell differenzierbar und} \\ \text{es gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen} \\ v_y = u_x, v_x = -u_y \end{array}$$

Außer der oben beschriebenen komplexen Linearität untersuchen wir die in der Aufgabe angegebenen Funktionen f_1 bis f_6 auch auf Linearität im Sinne von Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Beachte daß Linearität für diese durch die beiden folgenden Eigenschaften gekennzeichnet ist:

1. $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$, für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$
2. $F(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot F(x)$, für $\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2$

Man beachte, daß aus der komplexen Linearität die Linearität bzgl. $\mathbb{R}^2$ folgt, da

$$a \cdot z = (1, i) \begin{pmatrix} \text{Re }(a) & -\text{Im }(a) \\ \text{Im }(a) & \text{Re }(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Re }(z) \\ \text{Im }(z) \end{pmatrix}$$

gilt. Wir betrachten nun die auf dem Übungszettel angegebenen Funktionen f_1 bis f_6. Bei der Betrachtung der komplexen Differenzierbarkeit kann man sich, da alle Funktionen reell differenzierbar sind, auf die Prüfung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen beschränken.

a) Die Linearität bzgl. $\mathbb{R}^2$ ist erfüllt, da

$$f_1(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gilt. Also ist $u_x = 1 \neq -1 = v_y$ und somit ist f_1 nicht komplex differenzierbar und damit auch nicht komplex linear.

b) Die Linearität bzgl. $\mathbb{R}^2$ ist erfüllt, da

$$f_2(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gilt. Also ist $u_x = 1 \neq 0 = v_y$ und somit ist f_2 nicht komplex differenzierbar und damit auch nicht komplex linear.

c) f_3 ist komplex linear (und somit auch komplex differenzierbar sowie linear bzgl. $\mathbb{R}^2$) da folgendes gilt:

$$f_3(z) = \overline{i\overline{z}} = \overline{i} \cdot \overline{\overline{z}} = -i \cdot z$$

d) f_4 ist weder reell noch komplex linear, da

$$f_4(2) = 2 \cdot 2 = 4 \neq 2 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot f_4(1)$$

gilt. Ferner ist $f_4(x,y) = (x^2 + y^2, 0)$ also $u_x = 2x, u_y = 2y, v_x = v_y = 0$. Dies zeigt, daß f_4 nur im Nullpunkt komplex differenzierbar ist.

e) f_5 ist weder reell noch komplex linear, da $f_5(0) = 1$ gilt. Ferner ergibt sich $f_5(x,y) = (cos(y)e^x, sin(y)e^x)$ was zeigt, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Somit ist f_5 komplex differenzierbar.

f) Wegen $z\,|z|^{-2}\,\overline{z} = |z|^{-2}\,|z|^2 = 1$ ist $f_6(z) = \frac{1}{z}$ und somit als Komposition von komplex differenzierbaren Funktionen wiederum komplex differenzierbar (natürlich in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). f_6 ist weder reell noch komplex linear, da

$$f_6(2) = \frac{1}{2} \neq 2 = 1 + 1 = f_6(1) + f_6(1)$$

gilt.