Musterlösung zu Blatt 13

Aufgabe 58:

Behauptung: Ist die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergent und die Folge (b_n) beschränkt, so ist $\sum a_n b_n$ absolut konvergent.

Beweis:

Nach Voraussetzung konvergiert $\sum |a_n|$, also gibt es $c_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n| \leq c_1 \, \forall m \in \mathbb{N}$$

Desweiteren gibt es $c_2 \in \mathbb{R}$ mit $|b_n| \leq c_2 \, \forall n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n b_n| \leq c_2 \sum_{n=0}^{m} |a_n| \leq c_2 c_1 \, \forall m \in \mathbb{N}$$

Daher ist auch $\sum a_n b_n$ absolut konvergent, da die Folge der Partialsummen beschränkt und monoton wachsend ist. $\square$

Aufgabe 59:

1. $\sum \frac{n+1}{n^4+1}$ ist absolut konvergent, denn:

   $$\left| \frac{n+1}{n^4+1} \right| \leq \frac{n+n}{n^4} = \frac{2}{n^3}$$

   Also hat man eine absolut konvergente Majorante gefunden (vgl. Vorlesung).

2. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ist absolut konvergent, denn:

   Mit $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gilt

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2(n+1))!(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}} \overset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

   Also folgt die absolute Konvergenz aus dem Quotientenkriterium.

3. $\sum \frac{(-1)^n}{\log(2n)}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent, denn:

   Die Funktion $\log : (1, \infty) \to (0, \infty)$ ist monoton wachsend und $\log(2n) \overset{n \to \infty}{\to} \infty$, daher ist $\left(\frac{1}{\log(2n)} \right)$ eine monoton fallende Nullfolge. Die Konvergenz der Reihe folgt daher aus dem Leibniz-Kriterium. Jedoch gilt $\log(x) < x$ für $x > 0$. Deshalb folgt

$$\left|\frac{(-1)^n}{\log(2n)}\right| = \frac{1}{\log(2n)} \geq \frac{1}{2n}$$

Daher kann die Reihe nicht absolut konvergent sein, da man eine divergente Minorante für die Reihe der Absolutbeträge der Folgenglieder gefunden hat.

4. $\sum \frac{1}{(\log(1+n))^3}$ ist divergent, denn:

   Beh.: Es gibt einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\log(1+n) \leq \sqrt[3]{n}$ für $n \geq n_0$.
   Bew.: Nach Definition der Exponentialfunktion gilt für $x \geq 0$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 + \frac{x^4}{24}$$

   Daher folgt $\exp(\sqrt[3]{n}) \geq 1 + \frac{(\sqrt[3]{n})^4}{24}$. Weiterhin ist $\frac{n^{\frac{4}{3}}}{24} \geq n \iff n \geq 24^3$. Also gilt für $n \geq n_0 := 24^3$:

$$\exp(\sqrt[3]{n}) \geq 1 + n \iff \log(1+n) \leq \sqrt[3]{n}$$

   Diese Abschätzung kann man nun wie folgt anwenden: Für $m > 24^3$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(\log(1+n))^3} &= \underbrace{\sum_{n=1}^{24^3} \frac{1}{(\log(1+n))^3}}_{=:c} + \sum_{n=24^3+1}^{m} \frac{1}{(\log(1+n))^3} \\ &\geq c + \sum_{n=24^3+1}^{m} \frac{1}{n} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty\end{aligned}$$

   Also hat man eine divergente Minorante gefunden.
   Bemerkung: Eine ähnliche Abschätzung kann man auch aus den Regeln von de l'Hospital bzw. der aus der Vorlesung bekannten „Wachstumshierarchie"ableiten.

5. $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ist divergent, denn:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n}$$

   Daher hat man eine divergente Minorante gefunden.

Aufgabe 60:

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \geq 0$ und $\sum a_n$ konvergiere. Dann gibt es eine monoton fallende Nullfolge (b_n) mit $b_n > 0$, so dass auch $\sum \frac{a_n}{b_n}$ konvergiert.

BEWEIS:
Es ist $\sum a_n$ konvergent, also bildet die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge. Insbesondere gilt:

$$\forall j \in \mathbb{N}\, \exists k_j \in \mathbb{N}\, \forall m \geq k_j : \sum_{n=k_j}^{m} a_n < 2^{-j}$$

OBdA gelte $k_{j+1} > k_j$. Setze nun

$$\begin{aligned} b_n &:= 1 \quad , \qquad 1 \leq n \leq k_1 \\ b_n &:= \frac{1}{j} \quad , \qquad k_j < n \leq k_{j+1} \end{aligned}$$

Dies definiert eine positive, monoton fallende Nullfolge. Außerdem gibt es für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ ein $j^* \in \mathbb{N}$ mit $k_{j^*} \geq m$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n} &\leq \sum_{n=1}^{k_{j^*}} \frac{a_n}{b_n} \\ &= \sum_{n=1}^{k_1} \frac{a_n}{b_n} + \sum_{j=1}^{j^*-1} \sum_{n=k_j+1}^{k_{j+1}} \frac{a_n}{b_n} \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{k_1} a_n}_{=:c} + \sum_{j=1}^{j^*-1} j \sum_{n=k_j+1}^{k_{j+1}} a_n \\ &< c + \sum_{j=1}^{j^*-1} j 2^{-j} \\ &\leq c + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} j 2^{-j}}_{(*)} \end{aligned}$$

Dabei folgt die Konvergenz der Reihe $(*)$ aus dem Wurzelkriterium, denn:

$$\lim_{j \to \infty} \sqrt[j]{\frac{j}{2^j}} = \lim_{j \to \infty} \frac{\sqrt[j]{j}}{2} = \frac{1}{2}$$

Also ist $\sum \frac{a_n}{b_n}$ konvergent, da die Folge der Partialsummen monoton wachsend und beschränkt ist. $\square$

Aufgabe 61:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$.

(a) **Behauptung:**

$$\text{Für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \int\limits_0^\infty f_n(x)dx = \frac{\pi}{2}$$

BEWEIS: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann gilt für $y > 0$:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^y \frac{n}{n^2+x^2}dx &\overset{z=\frac{x}{n}}{=} \int_0^{y/n} \frac{1}{1+z^2}dz \\ &= \arctan(\frac{y}{n}) - \arctan(0) \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(b) **Behauptung:** Mit $f \equiv 0$ gilt $f_n \to f$ gleichmäßig.
BEWEIS:

$$\text{Für } x \in \mathbb{R} \text{ gilt: } |f_n(x)| \leq \frac{n}{n^2+0} = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Daraus folgt $\|f_n\|_{\text{sup}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c) **Behauptung:** Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)dx \neq \int\limits_0^\infty f(x)dx$$

BEWEIS: Es ist $\int\limits_0^\infty f(x)dx = 0 \neq \frac{\pi}{2}$.

Bemerkung: Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, lässt das Regelintegral die Vertauschung von Integration und gleichmäßigen Grenzwerten zu. In Übereinstimmung dazu gilt über kompakten Teilintervallen $[0, b]$, $b > 0$ hier natürlich auch:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^b f_n(x)dx = \arctan(\frac{b}{n}) - \arctan(0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Das Ergebnis dieser Aufgabe steht dazu nicht im Widerspruch, da es sich hier um ein uneigentliches Integral handelt.