BLATT 14 - Musterlösungen

62.

a) Für $sq > 1$ ist bekannt daß die Reihe $\sum n^{-sq}$ konvergiert. Laut Voraussetzung konvergiert auch die Reihe $\sum |a_n|$. Die Höldersche Ungleichung liefert für alle n:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{1/p} k^{-s} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{-sq} \right)^{1/q} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-sq} \right)^{1/q} < \infty$$

Dies impliziert din Konvergenz der Reihe $\sum |a_k|^{1/p} k^{-s}$.

b) Wir betrachten die Reihe $\sum a_n$, mit $a_n = n^{-1}(\log n)^{-\alpha}$ für $1 < \alpha < p$. Die Folge (a_n) ist monoton fallend und die Reihe

$$\sum 2^n a_{2^n} = \sum \frac{1}{n^\alpha \log 2}$$

konvergiert, also laut Verdichtungskriterium (Kaballo, s.246) konvergiert auch $\sum a_n$.

Es gilt jedoch:

$$a_n^{1/p} \cdot n^{-1/q} = \frac{1}{n^{1/p}} \cdot \frac{1}{(\log n)^{\alpha/p}} \cdot \frac{1}{n^{1/q}} = \frac{1}{n(\log n)^{\alpha/p}}$$

Eine erneute Anwendung des Verdichtungskriteriums liefert diesmal die Divergenz der Reihe $\sum n^{-1}(\log n)^{-\alpha/p}$, da $\alpha/p < 1$.

63.

a) Für $|x| < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + \sum_{k=1}^{n} x^k + \ldots + \sum_{k=n}^{n} x^k \\
&= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x} + \ldots + x^n \cdot \frac{1 - x}{1 - x} \\
&= \frac{1 + x + \ldots + x^n}{1 - x} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1 - x} \\
&= \frac{1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1 - x} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Da $|x| < 1$, ist $(|x|^n)$ eine monoton fallende Folge und die Potenzreihe $\sum |x|^n$ konvergiert. Dies impliziert (laut Vorlesung, 21.9) daß $\lim_{n\to\infty} n|x|^n = 0$. Für $n \to \infty$ in (1) gilt dann:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Weiterhin gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Daraus folgt daß $\sum kx^k = \sum((k+1)x^k - x^k)$ konvergiert, und daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

#

Eine andere Lösungsmöglichkeit ist folgende. Sei $f_k(x) = x^k$, also ist $f_k'(x) = kx^{k-1}$. Daher gilt für alle n:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{n+1} f_k'(x)$$

Sei $c \in [0,1]$ beliebig. Es folgt daß $\|f_k'\|_{[-c,c]} \leq (k+1)c^k$. Die Konvergenz der Potenzreihe $\sum(k+1)c^k$ impliziert dann die normale Konvergenz der Reihe $f_k'(x)$ für alle $x \in [-c,c]$, also auch die gleichmäßige Kovergenz. Satz 17.9 (Vorlesung) impliziert also daß

$$\left(\sum x^k\right)' = \sum f_k'(x) = \sum(k+1)x^k.$$

Aber $\sum x^k = (1-x)^{-1}$, deswegen gilt:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum(k+1)x^{k+1}.$$

b) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum a_n z^n$ ist gegeben durch $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$.

$$a_n = \frac{n^6}{(2n)!}: \quad \limsup \sqrt[n]{\frac{n^6}{(2n)!}} = \limsup \frac{(\sqrt[n]{n})^6}{(\sqrt[2n]{(2n)!})^2} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

da bekannt ist, daß $\sqrt[k]{k!} > k/3$. Folglich ist der Konvergenzradius $\rho = \infty$.

$$a_n = \frac{2.5^n}{n^8}: \quad \limsup \sqrt[n]{\frac{2.5^n}{n^8}} = \limsup \frac{2.5}{(\sqrt[n]{n})^8} = 2.5 \Rightarrow \rho = \frac{2}{5}.$$

$a_n = e^{-n}(1+n^{10}): \ \limsup \sqrt[n]{e^{-n}(1+n^{10})} = \limsup e^{-1}(\sqrt[n]{n})^{10}\sqrt[n]{n^{-10}+1} = e^{-1}$
$\Rightarrow \rho = e.$

64.
$f(x) = \sum f_k(x)$ mit $f_k(x) = (k + \sin^2(kx))^{-x}$.

a) Für alle $x \in [c, \infty)$ mit $c > 1$ gilt: $f_k(x) \le k^{-x} \le k^{-c}$, also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} < \infty.$$

Folglich ist die Reihe $\sum f_k(x)$ normal konvergent auf dem Intervall $[c, \infty)$. Die Grenzfunktion f ist stetig auf alle Intervalle der Form $[c, \infty)$ mit $c > 1$ (normale Konvergenz impliziert gleichmäßige Konvergenz, s.Vorlesung, 23.3), folglich ist sie stetig auch auf $(1, \infty)$.

b) Für $x \in [c, \infty)$ gilt: $h(x) := \sum (k+1)^{-x} \le f(x) = \sum f_k(x) \le g(x) := \sum k^{-x}$, wobei die Stetigkeit der Grenzfunktionen g, h sich mit demselben Argument wie oben erweisen läßt. Aus $\lim_{x \searrow 1} h(x) = \infty$, $\lim_{x \searrow 1} g(x) = \infty$, folgt dann ebenfalls $\lim_{x \searrow 1} f(x) = \infty$.

Angenommen die Konvergenz der Reihe $\sum f_k(x)$ wäre gleichmäßig auf $(1, \infty)$. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) < \epsilon$$

$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in (1, \infty)$.

Sei $M > 0$. Wegen $\lim_{x \searrow 1} f(x) = \infty$, gibt es ein $\delta > 0$ so daß gilt: $f(x) > M, \forall x \in (1, 1+\delta)$. Folglich ist

$$M - \sum_{k=1}^{n_0} f_k(x) < f(x) - \sum_{k=1}^{n_0} f_k(x) < \epsilon, \tag{2}$$

$\forall x \in (1, 1+\delta)$. Für ein gegebenes ϵ, ist n_0 eine feste Zahl, und die Funktion gegeben durch $\sum_{k=1}^{n_0} f_k(x)$ ist beschränkt auf $[1, \infty)$. Da M beliebig groß gewählt werden kann, liefert die Ungleichung (2) ein Widerspruch.

Die Konvergenz auf $(1, \infty)$ ist also nicht gleichmäßig.

c) Die Behauptung daß $f \in C^\infty((1, \infty))$ ist nicht richtig. Es kann lediglich gezeigt werden, daß $f \in C^m((m, \infty))$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Es gilt:

$$f_k(x) = (k + \sin^2(kx))^{-x} = \exp(-x \log(k + \sin^2(kx))) = \exp(\psi_k(x))$$

mit $\psi_k(x) = -x \log(k + \sin^2(kx))$.

Wir berechnen zunächst die Ableitungen von f_k:

$$\begin{aligned}
f_k' &= \exp(\psi_k)\psi_k' \\
f_k'' &= \exp(\psi_k)(\psi_k')^2 + \exp(\psi_k)\psi_k'' = \exp(\psi_k)((\psi_k')^2 + \psi_k'') \\
f_k''' &= \exp(\psi_k)\psi_k'((\psi_k')^2 + \psi_k'') + \exp(\psi_k)(2\psi_k'\psi_k'' + \psi_k''') \\
&= \exp(\psi_k)((\psi_k')^3 + 3\psi_k''\psi_k' + \psi_k''') \\
f_k^{(iv)} &= \exp(\psi_k)((\psi_k')^4 + 6(\psi_k')^2\psi_k'' + 3(\psi_k'')^2 + 4\psi_k'\psi_k''' + \psi_k^{(iv)}).
\end{aligned}$$

Durch Induktion zeigt man daß die m-te Ableitung von f_k folgende Form hat:

$$f_k^{(m)} = \exp(\psi_k)(\psi_k^{(m)} + G_m(\psi_k', \ldots, \psi_k^{(m-1)})), \tag{3}$$

wobei $G_m(y_1, \ldots, y_{m-1})$ ein Polynom m-ten Grades (in allen Variablen zusammen) ist, mit Koeffizienten die nicht von k abhängen, wobei die Ableitungen $\psi_k^{(j)}$ höchstens mit Potenz $m + 1 - j$ erscheinen.

Als nächstes berechnen wir die Ableitungen der Funktionen ψ_k. Es gilt: $\psi_k(x) = -(x\phi_k(x))$ mit $\phi_k(x) = \log(k + \sin^2(kx))$.

Folglich gilt für alle $m \geq 1$:

$$\psi_k^{(m)}(x) = -\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^{(m-j)} \phi_k^{(j)}(x) = -m\phi_k^{(m-1)}(x) - x\phi_k^{(m)}(x)$$

Aus (3) folgt also:

$$f_k^{(m)}(x) = \exp(-x\phi_k(x)) \left(-x\phi_k^{(m)}(x) + H_m(x, \phi_k'(x), \ldots, \phi_k^{(m-1)}(x))\right) \quad (4)$$

wobei $H_m(y_0, y_1, \ldots, y_{m-1})$ ein Polynom höchstens m-ten Grades sowohl in y_0, als auch in den Variablen $y_1, \ldots, y_{m-1}$ (zusammen) ist, mit Koeffizienten die nicht von k abhängen, wobei die Ableitungen $\phi_k^{(j)}$ höchstens mit Potenz $m + 1 - j$ erscheinen.

Wir berechnen nun die Ableitungen der Funktionen ϕ_k. Es gilt:

$$\phi_k(x) = \log(k + \sin^2(kx)) = \log(k + h(kx)) = g_k(kx) \quad (5)$$

mit

$$\begin{aligned} h(y) &= \sin^2(y) && (6) \\ g_k(y) &= \log(k + h(y)) && (7) \end{aligned}$$

Aus (5) folgt daß :

$$\phi_k^{(m)}(x) = k^m g_k^{(m)}(kx) \quad (8)$$

Nun müssen die Ableitungen der Funktionen g_k berechnet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} g_k'(y) &= \frac{h'(y)}{k + h(y)} \\ g_k''(y) &= \frac{h''(y)(k + h(y)) - (h'(y))^2}{(k + h(y))^2} \\ g_k'''(y) &= \frac{(kh''' - h'h'' + h'h''')(k + h) - 2h'(kh'' + hh'' - (h')^2)}{(k + h)^3}(y) \end{aligned}$$

Die Ableitungen von h sind beschränkt, und durch Induktiom stellt sich heraus, daß auch die Ableitungen von g_k beschränkt sind, mit einer Schranke die sich wie k^{-1} verhält. Wenn wir nun die Formel (8) in der Gleichung (4) einsetzen, ergibt sich:

$$f_k^{(m)}(x) = \exp(-x\phi_k(x)) \left(-xk^m g_k^{(m)}(kx) + H_m(x, kg_k'(x), \ldots, k^{m-1} g_k^{(m-1)}(x))\right) \quad (9)$$

Der Gesamtgrad bezüglich k des Ausdruckes $H_m(x, kg_k'(x), \ldots, k^{m-1}g_k^{(m-1)}(x))$ beträgt höchstens m, und wegen des Terms $-xk^m g_k^{(m)}(kx)$, der nicht zu H_m beiträgt, und der Abschätzung der Ableitungen für g_k, erhält man die Abschätzung:

$$\|f_k^{(m)}\| \leq Ck^{-c}c^m k^{m-1}$$

Die Reihe $\sum k^{m-c-1}$ konvergiert für $c > m$, und von hier kann man schließen daß $f_k \in C^m((m, \infty))$ mit demselben Argument wie im folgendes vereinfachtes Beispiel:

#

Falls $f_k(x) = k^{-x}$ kann man in der Tat zeigen, daß $f \in C^\infty((1, \infty))$.

Es gilt: $f_k^{(m)}(x) = (-1)^m k^{-x}(\log k)^m$ und für $c > 1$ (beliebig) gilt:

$$\sup_{x \in [c, \infty)} |f_k^{(m)}(x)| = k^{-c}(\log k)^m$$

Sei $m = 1$. Die Reihe $\sum k^{-c} \log k$ ist konvergent, folglich konvergiert die Reihe $\sum f_k'(x)$ normal (also auch gleichmäßig) auf $[c, \infty)$. Laut Satz 17.9 (Vorlesung) gilt dann für $f(x) = \sum f_k(x)$: $f \in C^1([c, \infty))$ und $f'(x) = \sum f_k'(x)$.

Wir zeigen durch Induktion daß $f \in C^m([c, \infty))$ für alle m, und daß $f^{(m)}(x) = \sum f_k^{(m)}(x)$.

Für $m = 1$ wurde dies bereits bewiesen. Angenommen $f \in C^{m-1}([c, \infty))$. Sei $g(x) = f^{(m-1)}(x)$ und $g_k(x) = f_k^{(m-1)}(x)$. Es gilt: $g_k'(x) = f_k^{(m)}(x)$, welches oben abgeschätzt wurde. Genau wie im Falle $m = 1$ erweist sich dann die Reihe $\sum g_k'(x)$ als normal konvergent, also auch gleichmäßig konvergent.

Mit demselben Argument wie für $m = 1$ kann man dann schließen daß $g \in C^1([c, \infty))$ und $g'(x) = \sum g_k'(x)$. Dies ist nichts anderes als die Behauptung für m, angenommen sie gilt für $m - 1$. Laut Induktionsprinzip gilt $f \in C^m([c, \infty))$ für alle m, also $f \in C^\infty([c, \infty))$.

Da $c > 1$ beliebig gewählt wurde, gilt folglich $f \in C^\infty((1, \infty))$.

65.

Beahuptung: Für alle Funktionen $f \in C^{(m)}(a, b)$ mit $f^{(m)}(x) = 1, \forall x \in (a, b)$ gilt: f ist ein Polynom m-ten Grades auf dem Intervall $I = (a, b)$.

Sei $m = 1$. Dann gilt, laut Voraussetzung, $f'(x) = 1, \forall x \in I$. Folglich hat f die Form $f(x) = x + c$ mit c eine beliebige Konstante, verifiziert also in diesem Fall die Behauptung.

Angenommen die Behauptung gilt für m, und es gelte $f^{(m+1)}(x) = 1, \forall x \in I$. Dann ist $(f')^{(m)}(x) = 1$, also ist f' ein Polynom m-ten Grades. Auf einem Intervall sind die Stammfunktionen von Polynomen m-ten Grades Polynome $m+1$-ten Grades (da $\int a_k x^k dx = a_k(k+1)^{-1}x^{k+1}+c$), also ist die Behauptung bewiesen.

66.
Wurde in der Vorlesung gerechnet.

67.
Gesucht sind die Extremalpunkte der Funktion
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x - 2\sin(x/2)$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x - \cos(x/2) = 2\cos^2(x/2) - 1 - \cos(x/2) \\
&= (\cos(x/2) - 1)(2\cos(x/2) + 1) \\
f''(x) &= -\sin x + \frac{1}{2}\sin(x/2) \\
f'''(x) &= -\cos x + \frac{1}{4}\cos(x/2)
\end{aligned}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung von f sind: $x_{k,1} = 4k\pi$; $x_{k,2} = 4\pi/3 + 4k\pi$; $x_{k,3} = 2\pi/3 + (4k+2)\pi$, für $k \in \mathbb{Z}$.

Es gilt: $f''(x_{k,1}) = f''(4k\pi) = 0$, aber $f'''(4k\pi) = -1 + 1/4 \neq 0$, also sind $x_{k,1} = 4k\pi$ keine Extremalpunkte (laut Vorlesung, 24.13).

Weiterhin ist $f''(x_{k,2}) = f''(4\pi/3 + 4k\pi) = \sqrt{3}/2 + (1/2)(\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}/4 > 0$, also sind die Punkte $x_{k,2} = 4\pi/3 + 4k\pi$ lokale Minima.

Zum Schluß ist $f''(x_{k,3}) = f''(2\pi/3+(4k+2)\pi) = -\sqrt{3}/2-(1/2)(\sqrt{3}/2) = -3\sqrt{3}/4 < 0$, also sind die Punkte $x_{k,3} = 2\pi/3 + (4k+2)\pi$ lokale Maxima.

$\square$