Lösungen zum Übungsblatt 2, Analysis I Wintersemester 2001/2002

Hinweis zu Induktionsbeweisen: Ein Induktionsbeweis besteht mindestens aus dem Induktionsanfang und dem Induktionsschluß. Im Induktionsschluß muß vermerkt werden, wo die Induktionsvoraussetzung (= I.V.) eingeht. In der Vorlesung wurde statt Induktionsvoraussetzung Induktionsannahme gesagt.

Zusätzlich kann man die Induktionsvoraussetzung und die Induktionsbehauptung notieren. Dies kann unter Umständen den Beweis des Induktionsschlusses erleichtern.

Aufgabe 6: In den folgenden Formeln wird die Konvention: $0^0 := 1$ benutzt.

Zunächst zum Beweis des Hinweises:

1.Möglichkeit (mit Induktion):

Behauptung : $\forall k \in \mathbb{N} \ : \ (x-y) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} \cdot y^j \ = \ x^k - y^k$

Induktionsanfang (I.A:) : Für $k = 1$ gilt: $(x-y) \cdot \sum_{j=0}^{1-1} x^{1-1-j} \cdot y^j = (x-y) \cdot x^0 y^0 = (x-y) \cdot 1 = (x-y)$

Induktionsvoraussetzung (I.V.) : $(x-y) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} \cdot y^j = x^k - y^k$

Induktionsbehauptung (I.B.) : $(x-y) \cdot \sum_{j=0}^{k+1-1} x^{(k+1)-1-j} \cdot y^j = (x-y) \cdot \sum_{j=0}^{k} x^{k-j} \cdot y^j = x^{k+1} - y^{k+1}$

Induktionsschluß (I.S.) : $(k \Rightarrow k+1)$

$$
\begin{aligned}
(x-y) \cdot \sum_{j=0}^{k} x^{(k+1)-1-j} \cdot y^j &= (x-y) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} x^{k-j} \cdot y^j \right) \\
&= (x-y) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-j} \cdot y^j \ + x^{k-k} \cdot y^k \right) \\
&= (x-y) \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} x \cdot x^{k-1-j} \cdot y^j \ + x^0 \cdot y^k \right) \\
&= x \cdot (x-y) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} \cdot y^j \ + (x-y) \cdot y^k \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} x \cdot (x^k - y^k) + (x-y) \cdot y^k \\
&= x^{k+1} - xy^k + xy^k - y^{k+1} \\
&= x^{k+1} - y^{k+1}
\end{aligned}
$$

2.Möglichkeit (Teleskopsumme): Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(x-y) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j} \cdot y^j &= \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-j} \cdot y^j - x^{k-1-j} \cdot y^{j+1} \\
&= (x^k - \underbrace{x^{k-1}y^1) + (x^{k-1}y^1}_{=0} - \underbrace{x^{k-1}y^1) + (x^{k-1}y^1}_{=0} \ -x^{k-3}y^3) + \ldots + \underbrace{(xy^{k-1} + y^k)}_{\ldots} \\
&= x^k - y^k
\end{aligned}
$$

Diese Idee läßt sich auch etwas formaler (d.h. ohne ...) aufschreiben:

$$
\begin{aligned}
(x-y)\cdot\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}\cdot y^j &= x\cdot\left(\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}\cdot y^j\right) - y\cdot\left(\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}\cdot y^j\right)\\
&= \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-j}\cdot y^j - \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}\cdot y^{j+1}\\
&\overset{\text{NR.}}{=} \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-j}\cdot y^j - \sum_{j=1}^{k} x^{k-j}\cdot y^j\\
&= x^k y^0 + \sum_{j=1}^{k-1} x^{k-j}\cdot y^j - \left(x^{k-k}\cdot y^k + \sum_{j=1}^{k-1} x^{k-j}\cdot y^j\right)\\
&= x^k - y^k + \sum_{j=1}^{k-1} x^{k-j}\cdot y^j - \sum_{j=1}^{k-1} x^{k-j}\cdot y^j\\
&= x^k - y^k
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung (N.R.): Indextransformation: In der Summe $\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}\cdot y^{j+1}$ soll die Laufvariable j durch $j+1$ ersetzt werden. Dazu werden in den Summanden der Term $j+1$ durch l (bzw. j durch $l-1$) ersetzt. Da j die Zahlen von 0 bis $k-1$ durchläuft, nimmt $l=j+1$ die Zahlen von $0+1$ bis $k-1+1$ an. Somit lauten die Grenzen nach der Transformation 1 und k.

$$
\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}\cdot y^{j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} x^{k-(j+1)}\cdot y^{(j+1)} \overset{\text{Trafo. } l=j+1}{=} \sum_{l=1}^{k} x^{k-l}\cdot y^l \overset{\text{Trafo. } j=l}{=} \sum_{j=0I}^{k} x^{k-j}\cdot y^j
$$

Nun zum Beweis der Aussage (mit dem Hinweis):

Behauptung: $p_k : [0,\infty)\to[0,\infty), p_k(x) := x^k$ ist monoton wachsend

Beweis: Es sei $0\le y<x$. Dann gilt:

$$
p_k(x)-p_k(y) = x^k - y^k \overset{\text{Hinweis}}{=} \underbrace{(x-y)}_{>0}\cdot\underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}\cdot y^j}_{>0} > 0
$$

$$
\text{Also gilt}: \quad 0\le y<x \;\Rightarrow\; p_k(x)<p_k(y)
$$

Alternativer Beweis der Aussage (mit Induktion):

Induktionsanfang (I.A:) : Für $k=1$ gilt: $p_1(x)=x$ und $0\le y<x \;\Rightarrow\; p_1(y)=y<x=p_1(x)$, d.h. $p_1$ist streng monoton wachsend.

Induktionsvoraussetzung (I.V.) : Für $k\in\mathbb{N}$ gilt $p_k(x)=x^k$ist auf dem Intervall $[0,\infty)$ streng monoton wachsend.

Induktionsbehauptung (I.B.) : $p_{k+1}(x)=x^{k+1}$ ist auf dem Intervall $[0,\infty)$ streng monoton wachsend.

Induktionsschluß (I.S.) : $(k\Rightarrow k+1)$

$$
\begin{aligned}
0\le y<x &\overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} 0\le p_k(y)<p_k(x)\\
&\Leftrightarrow 0\le y^k<x^k\\
&\overset{0\le y<x}{\Rightarrow} 0\le y^{k+1}\le yx^k<x^{k+1}\\
&\Rightarrow 0\le p_{k+1}(y)<p_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7:

a) Induktionsanfang (I.A.) : Für $n = 1$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = \frac{1}{4}1^2(1+1)^2$

Induktionsvoraussetzung (I.V.) : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Induktionsbehauptung (I.B.) : $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+1+1)^2$

Induktionsschluß (I.S.) : $(n \Rightarrow n+1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{1}{4}n^2 + (n+1)\right)(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{4}(n^2 + 4n + 4)(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{4}(n+2)^2(n+1)^2 = \frac{1}{4}(n+1)^2((n+1)+1)^2
\end{aligned}$$

b)Induktionsanfang (I.A.) : Für $n = 1$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1}{6}1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)$

Induktionsvoraussetzung (I.V.) : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Induktionsbehauptung (I.B.) : $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+1+1)(2 \cdot (n+1) + 1)$

Induktionsschluß (I.S.) : $(n \Rightarrow n+1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\
&= \left(\frac{1}{6}n(2n+1) + (n+1)\right)(n+1) \\
&= \frac{1}{6}(2n^2 + n + 6n + 6)(n+1) \\
&= \frac{1}{6}(2n^2 + 7n + 6)(n+1) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)
\end{aligned}$$

Vorbemerkungen zu Aufgabe 8 und 9: Es seien U, V zwei Mengen. Dann gilt: $U \subseteq V \;:\Leftrightarrow\; \forall x \;:\; x \in U \;\Rightarrow\; x \in V$ und $U = V \;:\Leftrightarrow\; U \subseteq V \;\wedge\; V \subseteq\subset U \;\Leftrightarrow\; \forall x \;:\; x \in U \Leftrightarrow x \in V$. Häufig wird $\subset$ synonym mit $\subseteq$verwandt. Die folgenden unmittelbar aus der Definition folgenden Aussagen bzgl. Schnitt, Vereinigung und Komplement werden ohne Zitat in den Aufgaben benutzt: $x \in U \cap V \;\Leftrightarrow\; x \in U$ und x $\in V$; $x \in U \cup V \;\Leftrightarrow\; x \in U$ oder $x \in V$; $x \in U \setminus V \;\Leftrightarrow\; x \in U$ und $x \notin V$. In den Lösungen werden die logischen Operationen *und* mit $\wedge$, *oder* mit $\vee$ und die Negation mit $\neg$ abgekürzt.

Aufgabe 8

a) Behauptung: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

1.Möglichkeit: zu zeigen: $x \in (A \cap B) \cup C \quad \Leftrightarrow \quad x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Beweis: Zunächst wird »$\subseteq$«, d.h. $x \in (A \cap B) \cup C \quad \Rightarrow \quad x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ bewiesen.

Es sei $x \in (A \cap B) \cup C$. Dann gilt $x \in A \cap B$ oder $x \in C$.

1.Fall: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ und $x \in B \Rightarrow x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cap C)$

2.Fall: $x \in C \quad \Rightarrow x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cap C)$

Nun zu »$\supseteq$«, d.h. $x \in (A \cap B) \cup C \quad \Leftarrow \quad x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Es sei $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Dann gilt $x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C$.

1.Fall: $x \in C$. Dann gilt $x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C$, d.h. die Voraussetzung ist erfüllt. Nun gilt: $x \in C \quad \Rightarrow \quad x \in (A \cap B) \cup C$, d.h. die Behauptung ist erfüllt.

2.Fall: $x \notin C$. Damit $x \in B \cup C$ gilt, muß $x \in B$ gelten. Ebenso folgt aus $x \in A \cup C$, daß $x \in A$ gilt. Damit also die Voraussetzung $x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C$ erfüllt ist, muß (in diesem Fall) $x \in A$ und $x \in B$ gelten. Also gilt dann $x \in A \cap B$. Damit folgt dann $x \in (A \cap B) \cup C$, d.h. die Behauptung.

2.Möglichkeit (etwas formaler mit Aussagenlogik):

Zwischenbehauptung: Es seien X, Y, Z Aussagen. Dann gilt $(X \wedge Y) \vee Z \Leftrightarrow (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$.

Zwischenbeweis: Aussagen können wahr oder falsch sein. Für 3 Aussagen gibt es somit 8 verschiedene Fälle:

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$(X \wedge Y) \vee Z$	$X \vee Z$	$Y \vee Z$	$(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	f	f	f	w	f
f	f	w	f	w	w	w	w
f	f	f	f	f	f	f	f

Da für jede mögliche Kombination von wahr (=w) und falsch (=f) die beiden Ausdrücke $(X \wedge Y) \vee Z)$ und $(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$ die gleichen Wahrheitswerte liefern, sind die beiden Ausdrücke äquivalent.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \cap B) \cup C \\
\Leftrightarrow \quad & x \in (A \cap B) \vee x \in C \\
\Leftrightarrow \quad & (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\
\Leftrightarrow \quad & (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \quad \text{(Zwischenbehauptung)} \\
\Leftrightarrow \quad & x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C \\
\Leftrightarrow \quad & x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)
\end{aligned}
$$

Die Gleichung $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ wird als ein Distributivgesetz der Mengenlehre bezeichnet. Entsprechend wird $(X \wedge Y) \vee Z \Leftrightarrow (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$ als Distributivgesetz der Logik bezeichnet.

Das andere Distributivgesetz der Mengenlehre lautet:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C)$$

Es beruht auf dem analogen Distributivgesetz der Logik:

$$(X \vee Y) \wedge Z \Leftrightarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$$

b)Behauptung: $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

1.Möglichkeit:$x \in C \setminus (A \cap B) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

Beweis: Zunächst wird »$\subseteq$«, d.h. $x \in C \setminus (A \cap B) \quad \Rightarrow \quad x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ bewiesen.

1.Fall $x \in A \cap B$. Dann gilt $x \notin C \setminus (A \cap B)$. Damit ist die Voraussetzung nicht erfüllt und damit ist dieser Teil fertig.

2.Fall $x \notin A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \notin A$ oder $x \notin B$. Aus $x \in C \setminus (A \cap B)$ folgt (in diesem Fall) $x \in C$. Damit die Voraussetzung erfüllt ist, muß also $x \in C$ gelten. Für diesen Fall folgt dann $x \in C \setminus A$ oder $x \in C \setminus B$. Also folgt $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

Nun wird »$\supseteq$«, d.h. $x \in C \setminus (A \cap B) \quad \Leftarrow \quad x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ bewiesen.

1.Fall $x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \in A$ und $x \in B$. Dann gilt $x \notin C \setminus A$ .und $x \notin C \setminus B$. Es folgt, daß $x \notin (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ gilt. Damit ist die Voraussetzung nicht erfüllt und damit ist dieser Teil fertig.

2.Fall $x \notin A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \notin A$ oder $x \notin B$. Aus $x \in C \setminus A \cup C \setminus B)$ folgt $x \in C$. Damit die Voraussetzung erfüllt ist, muß $x \in C$ gelten. Für diesen Fall folgt dann $x \in C \setminus (A \cap B)$, also die Behauptung.

2.Möglichkeit (etwas formaler mit Aussagenlogik):

Zwischenbehauptung: Es seien X, Y Aussagen. Dann gilt $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg X \vee \neg Y$.

Zwischenbeweis: Für 2 Aussagen gibt es insgesamt 4 Fälle:

X	Y	$X \wedge Y$	$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \vee \neg Y$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Da für jede mögliche Kombination von wahr (=w) und falsch (=f) die beiden Ausdrücke $\neg(X \wedge Y)$ und $\neg X \vee \neg Y$ die gleichen Wahrheitswerte liefern, sind die beiden Ausdrücke äquivalent.

Beweis:

$$\begin{aligned}
& x \in C \setminus (A \cap B) \\
\Leftrightarrow \quad & x \in C \wedge x \notin (A \cap B) \\
\Leftrightarrow \quad & x \in C \wedge \neg x \in (A \cap B) \\
\Leftrightarrow \quad & x \in C \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
\\
\Leftrightarrow \quad & x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \quad (\text{ Zwischenbehauptung }) \\
\Leftrightarrow \quad & (x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \quad (\text{das „ andere“ Distributivgesetz der Logik}) \\
\Leftrightarrow \quad & (x \in C \setminus A) \vee (x \in C \setminus B) \\
\Leftrightarrow \quad & x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)
\end{aligned}$$

Analog gilt $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. Diese Mengengleichung und die Mengengleichung aus der Aufgabe werden als *de Morgansche Regeln* bezeichnet.

Aufgabe 9 Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung, $A, A' \subset M$, $B, B' \subset N$. Dann bezeichnet $f^{-1}(B) = \{x \ : \ f(x) \in B\}$ die Urbildmenge von B und $f(A) = \{y \ : \ \exists x \in A : y = f(x)\}$ die Bildmenge von A bzgl.f.

Hinweis: Mit $f^{-1}(A)$ wird in der Regel die Urbildmenge von A bezeichnet. Falls die Menge A nur aus einem Element besteht, d.h. $A = \{x\}$, dann bezeichnet also $f^{-1}(\{x\})$ die Urbildmenge von x.

Nur wenn f zusätzlich bijektiv ist, kann f^{-1} überhaupt die Umkehrfunktion bezeichnen.

a)Behauptung: $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
y \in f(A \cap A') &\Leftrightarrow \exists x \in A \cap A' \ : \ y = f(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x \ : \ x \in A \wedge x \in A' \ : \ y = f(x) \\
&\Rightarrow \exists x \in A \ : \ y = f(x) \wedge \exists x' \in A' \ : \ y = f(x') \quad \text{(im allgemeinen gilt } x \neq x'\text{)} \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(A') \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(A')
\end{aligned}
$$

Zusatz 1: Im allgemeinen gilt nicht Gleichheit, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es seien $M = N = \mathbb{R}$, $A = \{-2\}$,$A' = \{2\}$und $f : M \to N$, $f(x) = x^2$.Dann folgt

$$
f(A \cap A') = f(\{-2\} \cap \{2\}) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{4\} = f(\{-2\}) \cap f(\{2\})
$$

Zusatz 2: Behauptung: Wenn f injektiv ist, dann gilt Gleichheit,d.h. $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

Beweis: Es reicht in den obigen Beweis zu zeigen, daß in der 3.Zeile unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß f injektiv ist, statt $\Rightarrow$ auch $\Leftrightarrow$ gilt.

Da f injektiv ist, gilt $f(x) = y = f(x') \ \Rightarrow \ x = x'$. Damit ergibt sich:

$$
\exists x \in A \ : y = f(x) \ \wedge \ \exists x' \in A' \ : y = f(x') \stackrel{f \text{ injektiv} \Rightarrow x = x'}{\Longrightarrow} \exists x \ : \ x \in A \ \wedge \ x \in A' \ : \ f(x) = y
$$

b) Behauptung: $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
y \in f(A \cup A') &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup A' : y = f(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x \ : \ x \in A \vee x \in A' \ : \ y = f(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in A \ : \ y = f(x) \vee \exists x' \in A' \ : \ y = f(x') \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(A') \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(A')
\end{aligned}
$$

c) Behauptung: $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B \cap B') &\Leftrightarrow f(x) \in B \cap B' \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B \wedge f(x) \in B' \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \wedge x \in f^{-1}(B') \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')
\end{aligned}
$$

d) Behauptung: $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B \cup B') &\Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' \\
&\Leftrightarrow f(x) \in B \vee f(x) \in B' \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \vee x \in f^{-1}(B') \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10 a) Für $n = 1$gilt $2^1 > 1^2$, für $n = 2$ gilt $2^2 = 2^2$, für $n = 3$ gilt $2^3 < 3^2$(!), für $n = 4$ gilt $2^4 = 4^2$und für $n = 5$ gilt

$2^5 > 5^2$.

Induktionsanfang (I.A:) : Für $n = 5$ gilt: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$

Induktionsvoraussetzung (I.V.) : $2^n > n^2$

Induktionsbehauptung (I.B.) : $2^{n+1} > (n+1)^2$

Induktionsschluß (I.S.) : $(n \Rightarrow n+1)$

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\overset{\text{I.V.}}{>} 2 \cdot n^2 \\ &\overset{\text{N.R.}}{\geq} n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Nebenrechnung (N.R.): Aufgrund der Wahl des Induktionsanfangs gilt $n \geq 5$. Damit folgt dann:

$$n \geq 5 \Rightarrow n \geq 3 \Rightarrow n \geq 2 + \frac{1}{n} \Rightarrow n^2 \geq 2n + 1$$

Die Aussage $2^n > n^2$ gilt für $n = 1$ oder $n \geq 5$. (Dieses »oder« entspricht dem logischen oder, was der Vereinigung von Mengen entspricht. Umgangssprachlich würde man auch sagen »Die Aussage $2^n > n^2$ gilt für $n = 1$ *und* $n \geq 5$«. Dieses »und« hat natürlich mit dem logischen und nichts zu tuen.

Hinweis: Es ist wichtig, daß der Induktionsschluß für alle natürlichen Zahlen n, die größer gleich der Zahl im Induktiosanfangang

sind, gilt.

b)Für $n = 1$ gilt $3^{(2^1)} = 3^2 = 9 > 2^{(3^1)} = 2^3 = 8$ und für $n = 2$ gilt $3^{(2^2)} = 3^4 = 81 < 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$.

Induktionsanfang (I.A.) : Für $n = 2$ gilt: $3^{(2^2)} = 3^4 = 81 < 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

Induktionsvoraussetzung (I.V.) : $3^{(2^n)} < 2^{(3^n)}$

Induktionsbehauptung (I.B.) : $3^{(2^{n+1})} < 2^{(3^{n+1})}$

Induktionsschluß (I.S.) : $(n \Rightarrow n+1)$

$$\begin{aligned} 2^{(3^{n+1})} &= 2^{3^n \cdot 3} \\ &= \left(2^{3^n}\right)^3 \\ &\overset{\text{I.V.}}{>} \left(3^{2^n}\right)^3 = \left(3^{2^n}\right)^2 \cdot 3^{2^n} \\ &> \left(3^{2^n}\right)^2 \quad \text{da } 3^{2^n} > 1 \text{ gilt} \\ &= (3^{2^n \cdot 2}) = 3^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Die Aussage $3^{(2^n)} < 2^{(3^n)}$ gilt für $n \geq 2$.