Musterlösung, Analysis I, Blatt 3

Aufgabe 11

1. $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

   $$f(x) := \begin{cases} x & , \text{ falls } x \in (0, 1/2] \\ -x \, , & \text{falls } x \in (1/2, 1) \end{cases} .$$

   f ist injektiv, denn für $x, y \in (0,1)$, $x \neq y$, gilt $|f(x)| = |x| = x \neq y = |y| = |f(y)|$, und somit $f(x) \neq f(y)$.

   f ist aber nicht monoton wachsend, da $f(1/4) = 1/4 > -3/4 = f(3/4)$; und f ist nicht monoton fallend, da $f(1/4) = 1/4 < 1/3 = f(1/3)$.

2. $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

   $$g(x) := 0, \qquad x \in (0,1).$$

   Dann ist g monoton wachsend, denn $g(x) = 0 \leq 0 = g(y)$ für $x, y \in (0,1)$ mit $x < y$. g ist aber nicht injektiv, da $g(1/4) = 0 = g(1/2)$.

3. $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

   $$h(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - 2 & , \text{ falls } x \in (0, 1/2] \\ \frac{1}{x-1} + 3 \, , & \text{falls } x \in (1/2, 1) \end{cases} .$$

   Es ist zu zeigen, dass h surjektiv ist, d.h. es muss gezeigt werden, dass es für jedes $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in (0,1)$ gibt mit $h(x) = y$.

   Sei zunächst $y \in [0, \infty)$. Wir definieren $x := \frac{1}{y+2}$. Dann gilt $x \in (0, 1/2]$, da

   $$0 \leq y < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \leq y + 2 < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x \leq \frac{1}{2},$$

   und es gilt $h(x) = y$, da

   $$h(x) = \frac{1}{x} - 2 = y + 2 - 2 = y.$$

   Sei nun $y \in (-\infty, 0)$. Wir definieren $x := \frac{1}{y-3} + 1$. Dann gilt $x \in (1/2, 1)$, da

   $$-\infty < y < 0 \Leftrightarrow -\infty \leq y - 3 < -3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \frac{1}{y-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < 1,$$

   und $h(x) = y$, da

   $$h(x) = \frac{1}{x-1} + 3 = y - 3 + 3 = y.$$

   Somit ist h surjektiv.

Aufgabe 12 Hier hat sich leider ein Tippfehler eingeschlichen. Es muss natürlich heißen: Seien $2\mathbb{Z}$ bzw. $3\mathbb{Z}$ die geraden bzw. die durch drei teilbaren *ganzen* Zahlen.

1. Wir schauen uns zunächst die Mengen $2\mathbb{Z}$ und $3\mathbb{Z}$ genauer an. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \{3p \mid p \in \mathbb{Z}\} \cup \{3p+1 \mid p \in \mathbb{Z}\} \cup \{3p+2 \mid p \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{2p \mid p \in \mathbb{Z}\} \cup \{2p+1 \mid p \in \mathbb{Z}\},\end{aligned}$$

wobei alle Vereinigungen disjunkt sind, d.h

$$\{3p \mid p \in \mathbb{Z}\} \cap \{3p+1 \mid p \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$$

$$\{3p+1 \mid p \in \mathbb{Z}\} \cap \{3p+2 \mid p \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$$
$$\{3p+2 \mid p \in \mathbb{Z}\} \cap \{3p \mid p \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$$
$$\{2p \mid p \in \mathbb{Z}\} \cap \{2p+1 \mid p \in \mathbb{Z}\} = \emptyset.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}2\mathbb{Z} &= \{2p \mid p \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{6p \mid p \in \mathbb{Z}\} \cup \{6p+2 \mid p \in \mathbb{Z}\} \cup \{6p+4 \mid p \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

und
$$3\mathbb{Z} = \{3p \mid p \in \mathbb{Z}\} = \{6p \mid p \in \mathbb{Z}\} \cup \{6p+3 \mid p \in \mathbb{Z}\},$$
wobei die Vereinigungen disjunkt sind, und es gilt somit

$$2\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z} = \{6p+2 \mid p \in \mathbb{Z}\} \cup \{6p+4 \mid p \in \mathbb{Z}\}$$

mit disjunkten Vereinigungen.

Wir definieren nun schrittweise eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $2\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z}$. In der Vorlesung (Folgerung 3.20) wurde bereits gezeigt, dass es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ gibt. Eine solche Abbildung $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist z. B. gegeben durch

$$f_1(x) := \begin{cases} p\ , & \text{falls } x = 2p+2 \text{ mit } p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -p\,, & \text{falls } x = 2p-1 \text{ mit } p \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Wir können nun leicht eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$ angeben (die Existenz einer solchen Abbildung garantiert Theorem 3.19). So ist z. B. die Abbildung $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \{0,1\}$,

$$f_2(x) := \begin{cases} (p,0)\,, & \text{falls } x = 2p \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \\ (p,1)\,, & \text{falls } x = 2p+1 \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

bijektiv. Abschließend bilden wir die Menge $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$ bijektiv auf $2\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z}$ ab, welches z. B. die Abbildung $f_3 : \mathbb{Z} \times \{0,1\} \to 2\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z}$,

$$f_3(x,n) := 6x + 2 + 2n, \quad (x,n) \in \mathbb{Z} \times \{0,1\},$$

leistet. Da alle Abbildungen f_1, f_2, f_3 bijektiv sind, ist auch die Abbildung $f_4 : \mathbb{N} \to 2\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z}$, mit

$$f_4(x) := f_3(f_2(f_1(x))), \quad x \in \mathbb{N},$$

bijektiv. Da f_4 bijektiv ist, existiert die Umkehrabbildung f_4^{-1}, welche bijektiv von $2\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$ ist. Die gesuchte Abbildung f ist also z. B. durch f_4^{-1} gegeben.

2. $g : (-1,1) \to (5,10)$ sei definiert durch

$$g(x) := \frac{5}{2}x + \frac{15}{2}$$

g ist injektiv, da für $x, y \in (-1,1)$ mit $x \neq y$ gilt

$$x \neq y \Leftrightarrow \frac{5}{2}x + \frac{15}{2} \neq \frac{5}{2}y + \frac{15}{2} \Leftrightarrow g(x) \neq g(y).$$

g ist auch surjektiv, denn für $y \in (5,10)$ sei $x := \frac{2}{5}y - 3$. Dann gilt $x \in (-1,1)$, da

$$y \in (5,10) \Leftrightarrow \frac{2}{5}y \in (2,4) \Leftrightarrow x \in (-1,1),$$

und

$$g(x) = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{5}y - 3\right) + \frac{15}{2} = y.$$

Aufgabe 13 Die Folge (h_n) ist positiv und monoton wachsend. Somit ist die Folge $(1/h_n)$ positiv und monoton fallend. Daher konvergiert $(1/h_n)$ gegen 0 genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} \,:\, \frac{1}{h_n} < \varepsilon$$

oder, mit $C = \frac{1}{\varepsilon}$, zu

$$\forall C > 0\, \exists n \in \mathbb{N} \,:\, h_n > C.$$

Sei also $C > 0$ beliebig. Unter Benutzung des Axioms A existiert nun $m \in \mathbb{N}$ mit

$$1 + \frac{m}{2} \geq C.$$

Für $n := 2^m$ können wir nun Satz 4.3 benutzen, und erhalten somit

$$h_n \geq 1 + \frac{m}{2} \geq C.$$

Dies zeigt, dass $(1/h_n)$ nach 0 konvergiert.

Aufgabe 14

1. Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 < a_n &= 2^{-n}\binom{n}{k} = \frac{2^{-n}}{k!}\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{2^{-n}}{k!}n(n-1)\cdots(n-k+1) \\ &\leq \frac{2^{-n}}{k!}n^k. \end{aligned}$$

   Beispiel 5.7 d) zeigt $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}}{k!}n^k = 0$, und somit folgt mit Feststellung 5.5:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

2. Es gilt

$$\frac{n^4 - (n^2-3)^2}{2n^2} = \frac{n^4 - n^4 + 6n^2 - 9}{2n^2} = \frac{6n^2-9}{2n^2} = \frac{6 - \frac{9}{n^2}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{6-0}{2} = 3$$

3. Wir betrachten zunächst die Folge (b_n), welche durch

$$b_n := \frac{n!5^{n^2} + n^n}{n2^{n^3}}$$

   definiert ist. Dann gilt

$$b_n = \frac{n!5^{n^2} + n^n}{n2^{n^3}} \leq \frac{n^n(5^{n^2}+1)}{n2^{n^3}} \leq 2\frac{n^{n^2}5^{n^2}}{2^{n^3}} = 2\left(\frac{5n}{2^n}\right)^{n^2}.$$

   Somit folgt für $n \geq 5$

$$0 < b_n \leq 2\left(\frac{5n}{2^n}\right)^{n^2} \leq 2\frac{5n}{2^n}.$$

   Aus $\frac{5n}{2^n} \to 0$ und Feststellung 5.5 folgt nun $b_n \to 0$, und die Feststellung nach 5.9 zeigt schließlich, dass die Folge $(\frac{n2^{n^3}}{n!5^{n^2}+n^n})$ gegen $+\infty$ strebt.

15. Zusatzaufgabe Wir konstruieren im Folgenden einen stabilen Stapel von Würfeln der Kantenlänge 1, bei dem jeder Würfel gegenüber dem darunter liegenden versetzt ist. Dabei beginnen wir mit einem Würfel an der Position $x_1 = 0$, wobei damit die Position des Mittelpunktes bezeichnet sein soll. Statt Würfel darauf zu stapeln, setzen wir jeweils *unter* den bisherigen – stabilen – Stapel einen weiteren Würfel. Der neue Würfel wird dabei ein wenig versetzt; der zweite Würfel kann zum Beispiel maximal an Position $x_2 = 0,5$ platziert werden, sonst kippt der erste hinunter, weil sein Schwerpunkt nicht mehr gestützt wird.

Allgemein: Wenn unser Turm k, $k \in \mathbb{N}$, Würfel hoch ist, dann liegt der Schwerpunkt s_k des Turmes bei

$$s_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i \tag{1}$$

und wir können den neuen Würfel darunter stellen, solange er um weniger als $0,5$ gegenüber s_k versetzt ist. Als vorsichtige Zeitgenossen wählen wir jeweils $x_{k+1} := s_k + 0,25$.

Auf diese Weise können wir – sehr ruhige Finger vorausgesetzt – zumindest einen beliebig hohen Turm bauen, bei dem jeder Würfel ein kleines Stückchen gegenüber dem darunter liegenen Würfel versetzt ist. Wie weit der so entstehende Überhang werden kann, können wir berechnen. Dazu berechnen wir den Versatz zweier übereinander liegender Würfel:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} - x_k &= s_k - s_{k-1} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i - \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} x_i \\
&= \frac{1}{k(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}(k-1)x_i - \sum_{i=1}^{k-1} kx_i\right) \\
&= \frac{1}{k(k-1)}\left((k-1)x_k + \sum_{i=1}^{k-1}(k-1)x_i - kx_i\right) \\
&= \frac{1}{k(k-1)}\left((k-1)x_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right) \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{k(k-1)}\left((k-1)x_k - (k-1)s_{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{k(k-1)}(k-1)0,25 \\
&= \frac{0,25}{k}
\end{aligned}$$

Der Abstand vom obersten Würfel zum Fuß des Turms beträgt

$$x_{n+1} - x_1 = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = 0,25 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass diese Folge divergiert: Genügend viele Bausteine vorausgesetzt, wird unser Turm also einen beliebig weiten Übergang erreichen.