Musterlösung, Analysis I, Blatt 4

Aufgabe 16

Da für Autos die mehrere Farben gleichzeitig tragen die Aussage falsch ist (schon der Induktionsanfang wäre nicht korrekt) beschränken wir uns hier auf die interessante Teilmenge der einfarbigen Autos. Für diese funktionniert offensichtlich der Induktionsanfang, da die Aussage (man überprüfe dies mit einem geeigneten Blick durch ein Fenster auf der Ostseite des Mathegebäudes) jedoch falsch ist, muß man den Fehler im Induktionsschritt suchen. Genauer muß er sich schon beim Schritt von einem Auto auf 2 Autos wiederfinden lassen, da ja auch die Aussage für zwei Autos falsch ist. Da die Induktionsvoraussetzung korrekt ist, bleibt noch der Schnitt von M_1 und M_2, der in diesem Fall ($M_1 = \{a_1\}$, $M_2 = \{a_2\}$) jedoch leer ist. Hier steckt also der Fehler.

Aufgabe 17

Wir betrachten zunächst die Hilfsfolge

$$b_n := a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} - a_n\right) = -\frac{1}{2} b_{n-1}.$$

Mittels einer vollständigen Induktion überzeuge man sich, daß somit

$$b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n b_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$$

gilt. Mit Hilfe der b_n läßt sich nun eine Teleskopsumme der Art

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k = a_n - a_0 = a_n - a$$

bilden. Folglich gilt unter Beachtung der geometrischen Summenformel

$$a_n = a + \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (b-a) = a + (b-a)\,\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ergibt sich somit endgültig

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}(b-a)\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + a = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a$$

Aufgabe 18

Da für hinreichend große n $a_k \sim a$ gilt und somit (unter Vernachlässigung eines endlichen Anfangsstücks) auch $\frac{1}{n-N}\sum\limits_{k=N+1}^{n} a_k \sim a$ ist, liegt es nahe derartige

Endstücke zu betrachten. Wir päzisieren also: Sei zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gewählt, so daß für $n > N$ $|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt (wir lassen uns zunächst einen Spielraum von $\frac{\varepsilon}{2}$ für das noch zu betrachtende Anfangsstück). Dies ergibt bereits für die zu betrachtende Gesamtdifferenz (es sei $n > N$)

$$|b_n - a| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - na\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| \leq \underbrace{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N}(a_k - a)\right|}_{=:A_N} + \underbrace{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=N+1}^{n}(a_k - a)\right|}_{=:R_N}$$

Für das Endstück gilt zunächst

$$R_N \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{n-N}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Damit auch $\frac{1}{n}A_N$ diese Abschätzung erfüllt wählen wir ein $N' > N \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n > N'$ gilt: $0 \leq \frac{1}{n}A_N \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Die Zusammensetzung der beiden Aussagen ergibt also $|b_n - a| \leq \varepsilon$ für $n > N'$.

Aufgabe 19

1. $a_n := n^2$, $b_n := \frac{1}{n}$
2. $a_n := n^2$, $b_n := -\frac{1}{n}$
3. $a_n := n$, $b_n := \frac{c}{n}$
4. $a_n := n$, $b_n := (-1)^n \frac{1}{n}$

Die zu zeigenden Eigenschaften der Folgen ergeben sich offensichtlich.

Aufgabe 20

Die Idee ist mit den rationalen Zahlen das Intervall $[0,1]$ geeignet zu durchlaufen. Hierzu setze zunächst $a_{ik} := \frac{k}{i}$ für $1 \leq k \leq i$. Wir geben nun induktiv eine Abzählung der Menge $\mathcal{I} := \{(k,i) \mid 1 \leq k \leq i\}$ an: Sei $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{I}$ definiert durch

$$\phi(1) = (1,1)\,,$$

$$\phi(n) = (k,i) \Longrightarrow \phi(n+1) := \begin{cases} (k+1,i) & \text{für } 1 \leq k < i, i \text{ gerade} \\ (k+1,i+1) & \text{für } k = i, i \text{ gerade} \\ (k-1,i) & \text{für } 1 < k \leq i, i \text{ ungerade} \\ (1,i+1) & \text{für } k = 1, i \text{ ungerade} \end{cases} \tag{1}$$

Anschaulich sieht dies so aus:

$$\begin{array}{cccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\
 & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\
 & & (3,3) & (3,4) \\
 & & & (4,4)
\end{array}$$

Wir zeigen zunächst, daß ϕ bijektiv ist: Dazu sei $\mathcal{I}_n := \{(k,i) \in \mathcal{I} \mid i \leq n\}$. Aus (1) erkennt man, daß der zweite Index von $\phi(n)$ monoton wachsend ist.

Beh.: $\forall\, (k,i) \in \mathcal{I}_n \; \exists|\; m \in \mathbb{N}$ mit $\phi(m) = (k,i)$.

Bew.:

IA($n = 1$): $\mathcal{I}_1 = \{(1,1)\}$ und $\phi(1) = (1,1)$. Da $\phi(2) = (1,2)$ und der zweite Index monoton wachsend ist, folgt die Eindeutigkeit von m in diesem Fall.

IS($n \to n+1$): Es gilt $\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_n \cup \{(k, n+1) \;\mid 1 \leq k \leq n+1\}$.

1. Fall (n gerade): Die IV ergibt: $\exists m \in \mathbb{N}$ mit $\phi(m) = (n,n)$. Daher gilt für $1 \leq k \leq n+1$ vermöge (1): $\phi(m+k) = (n+2-k, n+1)$. Die Eindeutigkeit von m in diesem Falle folgt aus $\phi(m) = (n,n)$, $\phi(m+n+2) = (1, n+2)$ und der Monotonie des ersten Index von ϕ auf der Menge $\{m+1, \ldots, m+n+1\}$. Dies zeigt die Behauptung für gerades n.
2. Fall (n ungerade): Analog

Wegen $\mathcal{I} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n$ folgt die Bijektivität von ϕ. Es sei nun

$$b_n := a_{\phi(n)} = \frac{k}{i}$$

Dann gilt

$$\begin{array}{ll}
|b_{n+1} - b_n| = \frac{1}{i} & \text{im 1. und 3. Fall} \\
|b_{n+1} - b_n| = 0 & \text{im 2. Fall} \\
|b_{n+1} - b_n| = \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} < \frac{1}{i+1} & \text{im 4. Fall}
\end{array}$$

Da i monoton wachsend ist und jeder Nenner erreicht wird, folgt $|b_{n+1} - b_n| \longrightarrow 0$. Wegen $0 \leq b_n \leq 1$ ist b_n beschränkt. Da ϕ bijektiv ist, existieren Teilfolgen b'_k bzw. b''_k mit $b'_k = \frac{1}{k}$ und $b''_k = \frac{k}{k}$, was zeigt, daß b_n divergent ist.