Musterlösung, Analysis I, Blatt 5

Aufgabe 21+22

- Es gilt $x^k \to \infty$ für $x \to \infty$. Man sieht nämlich leicht ein, daß $x^k \geq x$ für $x \geq 1$ gilt. Gibt man sich nun ein $C > 0$ vor, so setze man $D := \max\{C, 1\}$ und hat für alle $x > D$:
$$x^k \geq x > D \geq C.$$

- $\lim_{x\to\infty}(-1)^{[x]}$ existiert nicht. Für die Folge $x_n = n$ gilt nämlich $x_n \to \infty$, aber $(-1)^{[x_n]} = (-1)^n$ ist bekanntlich nicht konvergent.

- $\lim_{x\to 1}[x]$ existiert nicht. Für die Folge $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ gilt nämlich $[x_n] = 0$ für ungerades n und $[x_n] = 1$ für gerades n. Demnach ist $[x_n]$ nicht konvergent.

- Wegen der Stetigkeit der Wackelfunktion in 2 und Satz 7.3 gilt:
$$\lim_{x\to 2} W(x) = W(2) = Z(1/2) = 1/2.$$

- Für $x \to \infty$ gilt nach Satz 7.6 und wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion in 1:
$$\begin{aligned}\frac{(x+7)^2\sqrt{x+2}}{7x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}} &= \frac{1}{7(\frac{x}{x+7})^2\sqrt{\frac{x}{x+2}} - \frac{2}{x+14+49/x}\sqrt{\frac{x}{x+2}}} \\ &\to \frac{1}{7\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 1} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

- Es ist $\lim_{x\to 1^-}[x] = 0$. Denn zu beliebig vorgegebenem $\epsilon > 0$, können wir $\delta := 1$ wählen und es ergibt sich für alle x mit $0 = 1 - \delta < x < 1$, daß $|[x] - 0| = |0 - 0| = 0 < \epsilon$ ist.

- Es ist $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x) = 2$.

  Zunächst einmal gilt für $a, b \geq 0$
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}. \tag{1}$$

Für $x \geq 0$ gilt $\sqrt{x^2} = x$ und damit

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4x+1} - x &= \sqrt{x^2+4x+1} - \sqrt{x^2} \\ &\overset{(1)}{=} \frac{x^2+4x+1-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{4x+1}{x(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}. \\ &= \frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}.\end{aligned}$$

Nach den Grenzwertsätzen und wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion in 1 folgt nun

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-x) = \frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

- Wegen $\lim_{n\to\infty} 1+\sqrt{n} = \infty$ folgt $\lim x_n = 0$.
- Es ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Mit den Grenzwertsätzen folgt hieraus $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 23

- f_1 ist stetig in jedem $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Wir benutzen 7.3 und 7.4, um die Stetigkeit nachzuweisen. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$ eine Folge mit $x_n \to a$. Dann folgt $x_n - 2 \in \mathbb{R} \setminus \{a-2\}$ und $x_n - 2 \to a-2$, und wegen der Stetigkeit der Heaviside-Funktion in $a-2$ folgt: $f_1(x_n) = H(x_n-2) \to H(a-2) = f_1(a)$. Bei $x_0 = 2$ hat f_1 jedoch eine Sprungstelle, da man wie oben zeigen kann, daß $f_1(2^-) = H(0^-) = 0$ und $f_1(2^+) = H(0^+) = 1$ gilt.

- f_2 ist stetig in den Punkten 1 und -1. Wir benutzen 7.3 und 7.4, um dies nachzuweisen. Sei $a \in \{-1,1\}$ und $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$. Dann gilt wegen $|f_2(x_n)| = |x_n^2-1||D(x_n)| \leq |x_n^2-1|$ und der Stetigkeit von x^2-1

  $$f_2(x_n) \to 0 = f_2(a).$$

  In $a \notin \{-1,1\}$ ist f_2 jedoch unstetig, da ich nach Folgerung 6.13 Folgen $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ und $(s_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $r_n \to a$ und $s_n \to a$ finden kann. Für diese gilt jedoch $f_2(s_n) = 0$, aber $f_2(r_n) = r_n^2 - 1 \to a^2 - 1 \neq 0$.

- f_3 ist in ganz $\mathbb{R}$ stetig. Da x und W in jedem Punkt $a \neq 0$ stetig sind, ist auch das Produkt dort stetig (Satz 7.7). Sei also $a = 0$. Wir benutzen direkt die Definition 7.2 zum Nachweis der Stetigkeit. Sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Man setzt nun $\delta = \epsilon$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 0| = |x| < \delta$:

$$|f_3(x) - f_3(0)| = |xW(x)| \leq |x| < \delta = \epsilon.$$

Damit ist die Stetigkeit von f_3 in 0 bewiesen.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_4(x) = B(x)D(x) = B(x)$, d. h. f_4 ist die Stammbrüche-Funktion. Diese ist genau in den irrationalen Punkten, also in allen $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ stetig (siehe Beispiele 7.8).

Aufgabe 24 Eine Idee zur Lösung der Aufgabe ist es, daß Definitionsintervall $(0, 1)$ in unendlich viele Teilintervalle aufzuteilen (z.B. in die Teilintervalle $[1/(n + 1); 1/n)$ für $n \in \mathbb{N}$) und die Funktion f auf jedem der Teilintervalle konstant zu definieren. Beim Übergang von einem Teilintervall zum nächsten wird der Wert der Funktion dann jedoch jeweils erhöht, so daß an jeder Intervallgrenze eine Sprungstelle und damit eine Unstetigkeitsstelle entsteht. Außerdem ist die so definierte Funktion monoton steigend, da sie auf den Teilintervallen konstant ist und sich der Wert von einem Teilintervall zum nächsten jeweils nur erhöht. Man erhält so z.B. die folgende Funktion: $f(x) = 1/n$ für $1/(n + 1) \leq x < 1/n$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 25 Wir beweisen zunächst die folgende Hilfsaussage:

Lemma Gilt für einen inneren Punkt $c \in I$, daß die beiden einseitigen Grenzwerte $f(c^-)$ und $f(c^+)$ existieren und übereinstimmen, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c^-) = f(c^+).$$

Beweis des Lemmas: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da $d := f(c^-)$ existiert, gibt es ein $\delta_1 > 0$, so daß für alle $x \in I$ mit

$$c - \delta_1 < x < c \tag{2}$$

gilt: $|f(x) - d| < \epsilon$.

Da auch $f(c^+)$ existiert und ebenfalls gleich d ist, gibt es ein $\delta_2 > 0$, so daß für alle $x \in I$ mit

$$c < x < c + \delta_2 \tag{3}$$

gilt: $|f(x) - d| < \epsilon$.

Setzen wir nun $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, so gelten für alle $x \in I \setminus \{c\}$ mit $|x - c| < \delta$ entweder $c - \delta < x < c$ und damit (2) oder $c < x < c + \delta$ und damit (3). In jedem Fall folgt aber $|f(x) - d| < \epsilon$ und somit ist $\lim_{x \to c} f(x) = d$. $\square$

Kommen wir nun zum Beweis der eigentlichen Aussage. Man kann annehmen, daß f monoton steigend ist, da der andere Fall analog verläuft.

Nach Satz 7.11 existieren die einseitigen Grenzwerte in allen Punkten $c \in I$.

Sei zunächst $c \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls I. Seien (x_n) und (y_n) zwei gegen c konvergente Folgen, wobei $x_n < c$ und $y_n > c$ für alle n gelten soll. Dann gilt $f(x_n) \to f(c^-)$ und $f(y_n) \to f(c^+)$. Da stets $x_n < c < y_n$ gilt, folgt wegen der Monotonie von f auch $f(x_n) \leq f(c) \leq f(y_n)$ und somit auch nach Satz 7.6: $f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$. Es wird nun indirekt gezeigt, daß diese drei Werte sogar gleich sein müssen.

Nehmen wir zunächst an, es gälte $f(c^-) < f(c)$. Dann gäbe es ein w mit

$$f(x_1) \leq f(c^-) < w < f(c). \tag{4}$$

Nun können wir die Voraussetzung anwenden, daß $f(I)$ ein Intervall ist. Demnach müßte dann w in $f(I)$ liegen, d.h. es gäbe ein $a \in I$ mit $w = f(a)$. Wir überlegen uns nun, wo a im Intervall I liegen könnte.

- Wäre $a \geq c$, so wäre wegen der Monotonie von f auch $w = f(a) \geq f(c)$ im Widerspruch zu (4)
- Wäre $a < c$, so wäre $\epsilon := c - a > 0$ und es gäbe ein n_0, so daß $|x_n - c| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gelten würde. Für diese n wäre dann also $a < x_n \leq c$ und wegen der Monotonie von f gälte auch $w = f(a) \leq f(x_n)$. Nach Satz 7.6 würde hieraus auch $w \leq f(c^-)$ im Widerspruch zu (4) folgen.

Unsere Annahme $f(c^-) < f(c)$ führte also zu einem Widerspruch, so daß $f(c^-) = f(c)$ gelten muß.

Ebenso zeigt man, daß auch $f(c) = f(c^+)$ gilt, so daß die drei Werte wirklich übereinstimmen.

Nach dem oben bewiesenen Lemma heißt das jedoch, daß $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ gilt, und aus Satz 7.3 folgt die Stetigkeit von f in c.

In einem Randpunkt c des Intervalls I existiert nur einer der beiden Grenzwerte $f(c^-)$ und $f(c^+)$ (z.B. $f(c^-)$ in einem rechten Randpunkt). Genauso wie oben kann man dann aber zeigen, daß dieser Grenzwert gleich dem Funktionswert in dem Punkt c ist (also z.B. $f(c^-) = f(c)$).