Musterlösung zu Blatt 6

Aufgabe 26:

1. Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\log(a^b) = b\log(a)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \log(a^b) &\overset{Def.}{=} \log(\exp(b\log(a))) \\ &= b\log(a) \end{aligned}$$

2. Für $a > 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^{(bc)} = (a^b)^c$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a^{(bc)} &\overset{Def.}{=} \exp(bc\log(a)) \\ &= \exp(c(b\log(a))) \\ &\overset{1.}{=} \exp(c\log(a^b)) \\ &\overset{Def.}{=} (a^b)^c \end{aligned}$$

3. Für $a, d > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^b d^b = (ad)^b$$

Beweis: Aufgrund der Funktionalgleichungen von exp und log folgt

$$\begin{aligned} a^b d^b &= \exp(b\log(a))\exp(b\log(d)) \\ &= \exp(b\log(a) + b\log(d)) \\ &= \exp(b(\log(a) + \log(d))) \\ &= \exp(b\log(ad)) \\ &= (ad)^b \end{aligned}$$

Aufgabe 27:

1.
$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$$

Beweis: In der Vorlesung wurde $\lim\limits_{x \to 0^+} x \log(x) = 0$ gezeigt. Deshalb gilt für beliebige Folgen $(x_n) \subseteq (0, \infty)$ mit $x_n \to 0$ dann auch $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \log(x_n) = 0$. Wegen der Stetigkeit von exp in 0 folgt damit

$$x_n^{x_n} = \exp(x_n \log(x_n)) \to \exp(0) = 1, \, (n \to \infty)$$

2.
$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

Beweis: Es gilt $\log(x) \to -\infty$ sowie $\frac{1}{x} \to \infty$ für $x \to 0^+$. Also $\frac{1}{x} \log(x) \to -\infty$ für $x \to 0^+$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\exp(y) \to 0$ für $y \to -\infty$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit: $y < c \;\Rightarrow\; \exp(y) < \varepsilon$. Wegen $\frac{1}{x} \log(x) \to -\infty$ für $x \to 0^+$ gibt es $\delta > 0$ mit:

$$0 < x < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} \log(x) < c$$

und damit

$$0 < x < \delta \;\Rightarrow\; \exp(\frac{1}{x} \log(x)) < \varepsilon$$

3.
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^6 + 4n} = 1$$

Beweis:

$$\sqrt[n]{n^6 + 4n} = \sqrt[n]{n^6(1 + \frac{4}{n^5})} = (\sqrt[n]{n})^6 \sqrt[n]{1 + \frac{4}{n^5}}$$

Vorlesung: $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$, $x \mapsto x^6$ stetig in 1. Deshalb gilt $(\sqrt[n]{n})^6 \to 1$ für $n \to \infty$. Zeige noch: $\sqrt[n]{1 + \frac{4}{n^5}} \to 1$ für $n \to \infty$. Da $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend ist, gilt:

$$1 < 1 + \frac{4}{n^5} < 5 \;\Rightarrow\; 1 < \sqrt[n]{1 + \frac{4}{n^5}} < \sqrt[n]{5} \to 1 \text{ für } n \to \infty$$

4.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)=0$$

Beweis:

$$0 \le \sqrt[3]{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right) = \frac{3\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \le \frac{3\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt[6]{n}} \to 0,\ (n\to\infty)$$

Aufgabe 28:

1. Für die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 \le 10\}$ gilt:

$$\sup M = \sqrt{10},\ \inf M = -\sqrt{10}, \text{ Max. und Min. existieren nicht}$$

Beweis: Exemplarisch für das Infimum bzw. Minimum:
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \le 10 \iff -\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10}$, also ist $-\sqrt{10}$ eine untere Schranke von M. Mit der Dezimalbruchentwicklung von $-\sqrt{10} = -x_0, x_1x_2x_3\cdots$ findet man nun eine Folge $r_n := -x_0, x_1x_2x_3\cdots x_n0\cdots$, die in M enthalten ist und gegen $-\sqrt{10}$ konvergiert. Das Minimum hingegen existiert nicht, da $M \subset \mathbb{Q}$ und daher sonst $-\sqrt{10} = \inf M = \min M \in \mathbb{Q}$ Widerspruch!
(Wäre $-\sqrt{10} \in \mathbb{Q}$, so gäbe es teilerfremde natürliche Zahlen p, q mit $-\frac{p}{q} = -\sqrt{10} \Rightarrow 10 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 10q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ gerade $\Rightarrow$ p gerade $\Rightarrow p = 2k,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow 5q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ gerade $\Rightarrow q$ gerade, was einen Widerspruch zur Teilerfremdheit darstellt.)

2. Für die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 < 27\}$ gilt:

$$\sup M = 3, \text{ Max., Inf. und Min. existieren nicht}$$

Beweis: $x^3 < 27 \iff x < 3$. Daher ist M nach unten unbeschränkt und $S_M = \{x \in \mathbb{R} | x \ge 3\}$ ist die Menge der oberen Schranken. Offenbar ist $\sup M = \min S_M = 3$. Da $3 \notin M$ existiert kein Maximum.

3. Für die Menge $M = \{1 + \frac{2}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ gilt:

$$\max M = \sup M = 3,\ \inf M = 1, \text{ Min. existiert nicht}$$

Beweis: Es gilt $1 < 1 + \frac{2}{n} \le 3$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da $3 \in M$ folgt $\max M = \sup M = 3$. Da auch $x_n := 1 + \frac{2}{n} \in M$ und $x_n \to 1$ für $n \to \infty$ folgt $\inf M = 1$. Da jedoch $1 \notin M$ existiert kein Minimum.

4. Für die Menge $M = \{1 + \frac{1}{n} - 2^{-m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$ gilt:

$$\sup M = 2, \inf M = \frac{1}{2}, \text{ Max. und Min. existieren nicht}$$

Beweis: Es gilt $\frac{1}{2} < 1 + \frac{1}{n} - 2^{-m} < 2$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Daher ist $\frac{1}{2} \notin M$ eine untere Schranke und $2 \notin M$ eine obere Schranke. Für die Folge $x_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \in M$ gilt $x_n \to \frac{1}{2}$ und für $y_n := 2 - 2^{-n} \in M$ gilt $y_n \to 2$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 29:

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ist stetig.
Beweis: Die Stetigkeit auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist klar, weil sowohl $f : x \mapsto 0$ auf $(-\infty, 0)$ stetig ist als auch die Funktionen $f_1(x) := e^x$ und $f_2(x) := -\frac{1}{x}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig sind und somit auch $f = f_1 \circ f_2$ auf $(0, \infty)$ als Komposition stetiger Funktionen. Also ist nur noch die Stetigkeit in $a = 0$ zu zeigen:
Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt $e^y \to 0$ für $y \to -\infty \;\Rightarrow\; \exists c \in \mathbb{R} : y < c \;\Rightarrow\; e^y < \varepsilon$. Da $-\frac{1}{x} \to -\infty$ für $x \to 0^+$ gibt es $\delta > 0$ mit:

$$0 < x < \delta \;\Rightarrow\; -\frac{1}{x} < c \;\Rightarrow\; e^{-\frac{1}{x}} < \varepsilon$$

Damit ist also

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

Aufgabe 30:

(a) Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Behauptung: $f + g$ ist nach oben beschränkt und

$$\sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M)$$

Beweis: Weil f, g nach oben beschränkt sind existieren nach Satz 8.1 $\sup f(M)$ und $\sup g(M)$. Es gilt $f(x) \leq \sup f(M)$ und $g(x) \leq \sup g(M)$ für alle $x \in M$. Deshalb gilt auch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f(M) + \sup g(M)$$

Also ist $(f + g)(M) \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und nach Satz 8.1 existiert daher $\sup(f+g)(M)$. Ausserdem ist $\sup f(M) + \sup g(M)$ eine obere Schranke von $(f+g)(M)$. Da das Supremum aber nach Definition die kleinste obere Schranke ist, folgt daraus die Behauptung.

(b) Seien (a_n) und (b_n) beschränkt. Behauptung: $(a_n + b_n)$ ist beschränkt und
$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

Beweis: Es ist $|a_n| < c_1$ und $|b_n| < c_2$, also $|a_n+b_n| < c_1+c_2$. Nach dem Satz von Bolzano Weierstraß ist also $\Lambda(a_n+b_n) \neq \emptyset$. Zu $\lambda \in \Lambda(a_n+b_n)$ gibt es dann eine Teilfolge $a_{n_j} + b_{n_j} \to \lambda$ für $j \to \infty$. Nach Bemerkung 10.7 gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein k_0, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$a_{n_k} < \limsup a_{n_j} + \varepsilon$$

und ein k_1, so dass für alle $k \geq k_1$ gilt:

$$b_{n_k} < \limsup b_{n_j} + \varepsilon$$

Damit gilt also für $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ dann

$$\begin{aligned} a_{n_k} + b_{n_k} &< \limsup a_{n_j} + \limsup b_{n_j} + 2\varepsilon \\ \Rightarrow \lambda &\leq \limsup a_{n_j} + \limsup b_{n_j} + 2\varepsilon \\ &\leq \limsup a_n + \limsup b_n + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt auch

$$\lambda \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

Da nach Definition $\limsup(a_n + b_n) = \sup \Lambda(a_n + b_n)$, folgt also die Behauptung.

Bem.: Anders als auf dem Aufgabenblatt ist in (b) nun die Beschränktheit der Folgen vorausgesetzt. Diese sichert die Existenz des lim sup für die Folgen a_n, b_n und für die Summe. Wenn man nur die Beschränktheit nach oben voraussetzt, besitzen z.B die Folgen $a_n = b_n = -n$ keinen Häufungswert. Auch wenn man die Existenz von Häufungswerten von a_n und b_n zusätzlich zur Beschränktheit nach oben fordert, muss $a_n + b_n$ trotzdem keinen Häufungswert besitzen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$a_n = \begin{cases} 0 & , \text{ n gerade} \\ -n & , \text{ n ungerade} \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} -n & , \text{ n gerade} \\ 0 & , \text{ n ungerade} \end{cases}$$