MUSTERLÖSUNG ZU BLATT 7

Aufgabe 31:

Definition Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf I, falls folgendes gilt:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in I : |x-y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{|x|}$

Behauptung: f ist gleichmäßig stetig auf jedem der Intervalle: $(-\infty, -1], [-2, 2], [1, \infty)$.

Beweis: Falls $x, y \in [1, \infty)$ (oder $(-\infty, -1]$) gilt:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sqrt[4]{|x|} - \sqrt[4]{|y|}\right| = \frac{\big||x| - |y|\big|}{\sqrt[4]{|x|^3} + \sqrt{|x|}\sqrt[4]{|y|} + \sqrt[4]{|x|}\sqrt{|y|} + \sqrt[4]{|y|^3}} \leq \frac{|x-y|}{4},$$

da $|x|, |y| \geq 1$.

Für $x, y \in [1, \infty)$ (oder $(-\infty, -1]$) sei nun $\epsilon > 0$ beliebig.

Für $\delta_1 = 4\epsilon$ gilt: $|x-y| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$. f ist daher gleichmäßig stetig auf $[1, \infty)$ und auf $(-\infty, -1]$.

Da f stetig auf dem kompakten Intervall $[-2, 2]$ ist, folgt (Theorem 13.7, Kaballo oder Theorem 11.4, Vorlesung) daß f auch gleichmäßig stetig auf diesem Intervall ist.

Folglich gilt: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x, y \in [-2, 2], |x-y| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Somit ist die Behauptung bewiesen.

□

Sei nun $\epsilon > 0$ beleibig. Für $\delta = min(\delta_1, \delta_2, 1)$ gilt:

$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \epsilon.$

f ist somit gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung: Es muß $\delta < 1$ gewählt werden, damit sichergestellt wird daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$ gilt: $x, y \in (-\infty, -1] \vee x, y \in [-2, 2] \vee x, y \in [1, \infty)$ d.h. daß wir die gleichmäßige Stetigkeit auf einem dieser Intervalle benutzen können.

□

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = W(|x| + 1)$

Es gilt: $W(|x| + 1) = Z(\frac{1}{|x|+1})$ mit $Z(x) = 1 - |x|$ falls $x \in [-2, 2]$ und $Z(x + 4k) + Z(x), \forall k \in \mathbb{Z}$.

Behauptung: f ist gleichmäßig stetig auf jedem der Intervalle: $(-\infty, -1], [-2, 2], [1, \infty)$.

Beweis: Falls $x, y \in [1, \infty)$ (oder $(-\infty, -1]$) gilt: $0 < \frac{1}{|x|+1}, \frac{1}{|y|+1} \leq 1/2$.

Folglich ist

$$|g(x) - g(y)| = \left|Z(\frac{1}{|x| + 1}) - Z(\frac{1}{|y| + 1})\right| = \left|1 - \frac{1}{|x| + 1} - 1 + \frac{1}{|y| + 1}\right|$$
$$= \frac{\big||x| - |y|\big|}{(|x| + 1)(|y| + 1)} \leq \frac{|x - y|}{4}$$

Von diesem Punkt an, verläuft der Beweis völlig analog zu (i).

□

(iii) $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}, h(x) = W(x)$

Für $x > 0$ gilt $W(x) = Z(\frac{1}{x})$ mit $Z(\cdot)$ definiert in (ii).

Sei $a_n = \frac{1}{4n+1}, b_n = \frac{1}{4n}, n \geq 1$. Es gilt:

$$|h(a_n) - h(b_n)| = \left|Z(\frac{1}{a_n}) - Z(\frac{1}{b_n})\right| = |Z(4n + 1) - Z(4n)| = |0 - 1| = 1$$

Es gilt jedoch: $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$. Die Funktion h kann also nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$ sein, da ein Widerspruch zu Satz 13.6 (Kaballo) oder Satz 11.3 (Vorlesung) vorhanden ist.

□

Aufgabe 32:

Definition Für eine Funktion $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $\forall x > \delta : \; |f(x) - c| < \epsilon$ gilt.

a)

$$\lim_{x\to\infty}(1 + 1/x) = 1$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig und sei $\delta = 1/\epsilon$.

Für $x > \delta$ gilt: $|1 + 1/x - 1| = 1/x < \epsilon$.

Laut Definition gilt also $\lim_{x\to\infty}(1 + 1/x) = 1$.

b) Die Folge $a_n = 1 + 1/n$, für $n \in \mathbb{N}$ ist eine Cauchyfolge.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben, und sei $n_0 = [2/\epsilon] + 1$. Für $n_0 < n < m$ gilt:

$$|a_n - a_m| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{n_0} < \epsilon$$

Die Folge $a_n = 1 + 1/n$ ist also eine Cauchyfolge.

$\square$

Aufgabe 33:

Sei

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq 1/n \\ 1 - n|x| & \text{für } |x| < 1/n \end{cases}$$

a) Es soll gezeigt werden, daß die Funktionen f_n stetig sind.

i) Sei $x_0 > 1/n$. Da auf dem Intervall $(1/n, \infty)$ die Funktion identisch verschwindet, gilt:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 = |x_0 - 1/n| : \forall x$ mit $|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$.

Die Definition der Stetigkeit ist also verifiziert in allen Punkten des Intervalls $(1/n, \infty)$. Analog verifiziert man die Stetigkeit auf $(-\infty, -1/n)$.

ii) Sei $x_0 \in (-1/n, 1/n)$. Für $\epsilon > 0$ sei $\delta_2 = min(\epsilon/n, |x_0 - 1/n|, |x_0 + 1/n|)$.

Für alle x mit $|x - x_0| < \delta_2$ gilt:

$|f(x) - f(x_0)| = \big|1 - n|x| - 1 + n|x_0|\big| = n\big||x_0| - |x|\big| \leq n|x - x_0| \leq \epsilon$.

Die Funktion f_n ist also stetig auch auf dem Intervall $(-1/n, 1/n)$.

iii) Sei $x_0 = 1/n$. Für $\epsilon > 0$ beliebig, sei $\delta = min(\delta_1, \delta_2, 1/n)$, wobei δ_1, δ_2 wie oben definiert sind.

Für alle x mit $|x - 1/n| < \delta$ gilt:

$|f(x) - f(x_0)| \leq \big|1 - n|x| - 0\big| \leq n|1/n - x| < n\delta \leq n\epsilon/n = \epsilon$.

Die Funktion ist also stetig auch in dem Punkt $1/n$.

Die Stetigkeit in $-1/n$ verifiziert man analog.

b) Man bestimme den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge (f_n).

i) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gibt also ein n_0 (groß genug), so daß für $n > n_0$ gilt $|x| > 1/n$, d.h. $f_n(x) = 0, \forall n > n_0$.

In diesem Fall gilt also: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

ii) Sei nun $x = 0$. Es gilt $f_n(0) = 1, \forall n$, so daß $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.

Die gesuchte Grenzfunktion ist also:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

c) Die Folge (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig.

i) Angenommen es gäbe gleichmäßige Konvergenz. Laut Definition würde dann gelten: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Es gilt jedoch:

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq 1/n \text{ oder } x = 0 \\ 1 - n|x| & \text{für } |x| < 1/n, x \neq 0 \end{cases}$$

Seien nun $\epsilon < 1/2$ und n_0 wie oben. Es gilt: $|f_{n_0}(1/2n_0) - f(1/2n_0)| = 1/2$ $\longrightarrow$ Widerspruch zu $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Annahme daß die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert ist also falsch.

ii) Angenommen es gäbe gleichmäßige Konvergenz. Laut Theorem 11.9 der Vorlesung wäre dann mit den Funktionen f_n auch die Grenzfunktion f stetig. Laut b), dies ist jedoch nicht der Fall, also kann die Folge f_n nicht gleichmäßig konvergieren.

$\square$

Aufgabe 34:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, mit $f(x + y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in, R$ und $f(0) > 0$. Wir begehen nun folgende Teilschritte:

i) $f(0) = 1$.

Es gilt: $f(0) = f(0 + 0) = f(0)^2$.

Da laut Voraussetzung $f(0) > 0$, muß $f(0) = 1$ gelten.

ii) $f(nx) = f(x)^n, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen durch Induktion daß $f(nx) = f(x)^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich wahr.

Angenommen sie gilt für $n - 1$.

Dann ist $f(nx) = f((n-1)x+x) = f((n-1)x)f(x) = f(x)^{n-1}f(x) = f(x)^n$.

Die Behauptung ist also bewiesen für alle natürlichen Zahlen n.

Insbesondere gilt $f(n) = f(1)^n$.

iii) $f(-nx) = f(x)^{-n}, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$1 = f(0) = f(nx - nx) = f(nx)f(-nx) = f(x)^n f(-nx)$.

Es folgt daher daß $f(-nx) = f(nx)^{-1} = f(x)^{-n}$.

Insbesondere gilt $f(-n) = f(1)^{-n}$.

iv) $f(1) > 0$.

Laut i) gilt: $1 = f(0) = f(1-1) = f(1)f(-1)$, daher ist $f(1) \neq 0$.

Weiterhin gilt: $f(1) = f(1/2 + 1/2) = f(1/2)^2 \geq 0$.

Da gezeigt wurde, daß$f(1) \neq 0$, muß daher $f(1) > 0$ gelten.

v) $f(s) = f(1)^s, \forall s \in \mathbb{Q}$.

Sei $s = p/q$ eine beliebige rationale Zahl, mit $q > 0$.

Mit der Verwendung von ii) bzw. iii) für $x = p/q$ gilt: $0 < f(1)^p = f(p) = f(q \cdot p/q) = f(p/q)^q$.

Daher gilt: $f(p/q) = f(1)^{\frac{p}{q}}$ für alle rationale Zahlen $s = p/q$.

vi) $f(x) = f(1)^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig und (x_n) eine Folge von rationalen Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Die Stetigkeit der Funktion f impliziert nun daß $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(1)^{x_n} = f(x)$.

Die Stetigkeit der Funktion $x \mapsto f(1)^x$ impliziert nun $f(1)^x = f(x)$ und damit die Behauptung der Aufgabe.

$\square$