Musterlösung Analysis I Blatt 8

1 Aufgabe 35

Es sei $t \in \mathcal{T}([-2,2])$ durch $t(x) := [\frac{1}{2}x^2]$ definiert. Man berechne $S(t)$.

Da $\frac{1}{2}x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2}$ und $\frac{1}{2}x^2 \geq 2 \Leftrightarrow |x| \geq 2$ gilt, können wir t als:

$$t(x) = \begin{cases} 0 & , \quad |x| < \sqrt{2} \\ 1 & , \quad \sqrt{2} \leq |x| < 2 \\ 2 & , \quad |x| = 2 \end{cases}$$

schreiben. Mit Zerlegung $Z = \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$ sind die offenen Teilintervalle gegeben durch $Z_1 = (-2, -\sqrt{2}),\ Z_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ Z_3 = (\sqrt{2}, 2)$. Wegen $S(t) = \sum\limits_{k=1}^{3} t_k |Z_k|$ folgt, dass $S(t) = 1|(2-\sqrt{2})| + 0|(-\sqrt{2}-\sqrt{2})| + 1|(2-\sqrt{2})| = 4 - 2\sqrt{2}$ ist.

2 Aufgabe 36

Es sei Z die Zackenfunktion. Ist $Z|_{[0,3]}$ eine Regelfunktion? Man bestimme $\int\limits_0^3 Z(x)dx$.

Da $Z|_{[0,3]}$ stetig ist, folgt aus einem zentralen Satz der Vorlesung, dass $Z|_{[0,3]}$ eine Regelfunktion auf dem Intervall $I = [0,3]$ ist. Da wir die Approximation durch die Treppenfunktion aber auch benötigen um das Integral zu berechnen, werden wir die gleichmässige Konvergenz einer Treppenfunktion nocheinmal explizit nachrechnen. Laut Definition der Zackenfunktion gilt:

$$Z|_{[0,3]}(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad 0 \leq x < 2 \\ x - 3 & , \quad 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Es reicht jetzt die Intervalle getrennt zu betrachten. Wir wählen äquidistante Zerlegungen $Z^{(n)} = \{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2n}{n} = 2 + \frac{0}{n}, 2 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{2}{n}, \ldots, 2 + \frac{n}{n}\}$. Für die Feinheit der Zerlegungen gilt $\Delta(Z^{(n)}) = \frac{1}{n}$. Die Zerlegung $Z^{(n)}$ enthält $3n + 1$ Punkte, d.h. $r^{(n)} = 3n$

Jetzt wählen wir den Funktionswert von Z am jeweils linken Intervallende als Funktionswert für unsere Treppenfunktionen und erhalten: $t_n = \sum\limits_{k=1}^{3n} Z(x_{k-1})\chi_{(x_{k-1},x_k]} + \chi_{\{0\}}$. Nun gilt

$$\|Z|_{[0,3]} - t_n\| \leq \frac{1}{n}$$

da nach der Vorlesung

$$|Z(x) - Z(y)| \leq |x - y|$$

und $|Z_k| = \frac{1}{n}$. Die Treppenfunktionen t_n konvergieren also gleichmäßig gegen $Z|_{[0,3]}$.

Da $\int\limits_0^3 Z(x)dx = \int\limits_0^2 Z(x)dx + \int\limits_2^3 Z(x)dx$ ist, können wir zunächst die zwei Teilintegrale berechnen. Laut Definition gilt:

$$\int\limits_0^2 Z(x)dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty} S(t_n|_{[0,2]}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} (1 - x_{k-1})\frac{1}{n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} 1 - \sum_{k=1}^{2n} \frac{k-1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\left(2n - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{2n} 1\right)\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - 2n\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(2 - 2\frac{n^2+n/2}{n^2} + \frac{2}{n}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Ebenso: $\int\limits_2^3 Z(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} Z(2+\frac{k-1}{n})\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1+\frac{k-1}{n})$
$= \lim\limits_{n\to\infty} (-1 + \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n} - \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} 1) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.
Das ergibt $\int\limits_0^3 Z(x)dx = 0 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

3 Aufgabe 37

Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Einschränkung $f|_{[c,b]}$ sei eine Regelfunktion. Für alle $a < c < b$. Man zeige die Existenz von $\lim\limits_{c\to a^+} \int\limits_c^b f(x)dx$.

Zunächst eine Vorüberlegung. Wir bezeichnen f^+ als die Funktion, die aus f entsteht falls man die negativen Anteile von f Null setzt und mit f^- die Funktion bei der die positiven Anteile von f Null gesetzt werden und die negativen mit -1 multipliziert werden. Formal bedeutet das:$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ und $f^-(x) := -\min\{f(x), 0\}$.

Falls f eine Regelfunktion war, so ist $f^+,\ f^-$ auch eine Regelfunktion, da die Formeln $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ bzw. $\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ gelten und der Betrag und die Summe von Regelfunktionen wieder Regelfunktionen sind. Außerdem gilt $f = f^+ - f^-$.

Betrachtet man nur nichtnegative Funktionen f, also $f(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b]$ und fasst man das Integral als Flächenfunktion auf, also $I(c) = \int\limits_c^b f(x)dx$ dann gilt für $a < c_1 < c_2 < b :$
$I(c_1) = \int\limits_{c_1}^b f(x)dx = \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int\limits_{c_2}^b f(x)dx \geq \int\limits_{c_2}^b f(x)dx = I(c_2)$. Daher ist $c \to I(c)$ monoton fallend. Da f auf dem Intervall $(a,b]$ beschränkt ist, existiert $||f|| = \sup\limits_{x\in(a,b]} |f(x)|$. Sei nun $a < c < b : \int\limits_c^b f(x)dx \leq (b-c)||f|| \leq (b-a)||f||,\ \forall c > a$. Also ist das Integral nach oben beschränkt. Aufgrund der Monotonie von I folgt die Existenz des Grenzwertes. Nun gilt für eine beliebige Funktion f:
$\lim\limits_{c\to a^+} \int\limits_c^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to a^+} \int\limits_c^b (f^+ + f^-)(x)dx = \lim\limits_{c\to a^+} \int\limits_c^b f^+(x)dx + \lim\limits_{c\to a^+} \int\limits_c^b f^-(x)dx$ da wir wissen, dass die rechte Seite existiert, folgt die Behauptung der Aufgabe aufgrund der Grenzwertsätze.

Also muss f in dem Punkt a nicht definiert sein, trotzdem kann man ein uneigentliches Integral als Grenzwert für $c \to a^+$ erklären. Falls der Grenzwert von f für $x \to a^+$ existiert, kann die Funktion zu einer Regelfunktion fortgesetzt werden.

Ein Beispiel für eine Funktion die nicht zu einer Regelfunktion fortgesetzt werden kann, ist die Wackelfunktion $W(x)$ bzw. $|W(x)|$ für eine positive Funktion.

4 Aufgabe 38

Es sei $f \in C([a,b])$, $\int\limits_a^b |f(x)|dx = 0$. Man zeige: $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $|f(x)| > 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$ (Wäre $f(a)$ oder $f(b)$ grösser Null, so können wir aufgrund der Stetigkeit von f solch ein $x_0 \in (a,b)$ finden). Wir setzen $|f(x_0)| = \delta$. Es existiert $a < y < x_0$ mit $|f(x)| > \frac{\delta}{2}$ für $x \in [y, x_0]$. Dieses y existiert, da f stetig ist. Denn zu $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ existiert ein γ, so dass für $x \in [a,b]$ gilt: Aus $|x_0 - x| < \gamma \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \frac{\delta}{2}$. Aufgrund der Additivität des Integrals folgt: $\int\limits_a^b |f(x)|dx = \int\limits_a^y |f(x)|dx + \int\limits_y^{x_0} |f(x)|dx + \int\limits_{x_0}^b |f(x)|dx \geq \int\limits_y^{x_0} \frac{\delta}{2} dx \geq (y - x_0)\frac{\delta}{2} > 0$. Was im Widerspruch zur Vorraussetzung steht. Daraus folgt die Behauptung.

Es sei $g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\int\limits_a^b |g(x)|dx = 0$. Man zeige: Es gilt $g(c^-) = 0$ und $g(c^+) = 0$ für $c \in (a,b)$.

Eine Charakterisierung von Regelfunktionen ist, dass die einseitigen Grenzwerte der Funktion in jedem Punkt des Definitionsintervalles (Nur einseitige in den Endpunkten) existieren. Also bleibt noch zu zeigen, dass sie Null sind. Beweis durch Widerspruch: Sei $g(c^+) > 0$. Wähle $\epsilon < \frac{g(c^+)}{2}$. Dann folgt wegen der Existenz des Grenzwertes: $\exists \delta > 0 \forall x \in (c, c+\delta): \ |g(c^+) - g(x)| < \epsilon \Rightarrow \forall x \in (c, c+\delta): \ g(x) > \frac{g(c^+)}{2}$. Nun folgt mit ähnlicher Argumentation wie in Teil a): $\int\limits_a^b |g(x)|dx = \int\limits_a^c |g(x)|dx + \int\limits_c^{c+\delta} |g(x)|dx + \int\limits_{c+\delta}^b |g(x)|dx \geq \int\limits_c^{c+\delta} |g(x)|dx \geq \delta\frac{g(c^+)}{2} > 0$, was ein Widerspruch zur Vorraussetzung ist. Die Aussage für $g(c^-)$ ist analog.