Lösungen zum Übungsblatt 9, Analysis I Wintersemester 2001/2002

Aufgabe 39

Die Funktionen f und g sind auf ihrem gesamten Definitionsgebiet Zusammensetzungen (d.h. Komposition, Produkt, ...) von differenzierbaren Funktionen. Nach den entsprechenden Regeln (Kettenregel, Produktregel, ... Vorlesung 15.5, 15.6; Kaballo 19.6,19.7) sind f und g damit auf ihren gesamten Definitionsgebiet differenzierbar. Für die Ableitungen ergeben sich damit:

$$f'(x) = e^x(1+x^2) + e^x \cdot 2x = e^x(1+2x+x^2) \qquad \text{und} \qquad g'(x) = 2\log(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot (\frac{-1}{x^2}) = -2\log(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x} \quad .$$

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch eine Fallunterscheidung der Form $\begin{cases} f_1(x) & : \ x \leq 0 \\ f_2(x) & : \ x > 0 \end{cases}$ mit differenzierbaren Funktionen $f_1 : (-\infty\, 0] \to \mathbb{R}$ und $f_2(0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben. Die Ableitung der Funktion f im Punkt $x_0 \in J$ ist definiert als Limes des Differenzenquotient, d.h.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ \forall x \ : \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \epsilon$$

Eine genaue Analyse dieser Definition ergibt, daß zur Berechnung der Ableitung in der Stelle x_0 nur die Definition der Funktion f in einer kleinen Umgebung von x_0 eine Rolle spielen. Am Beispiel dieser Funktion f bedeutet dies:

I) f ist in $x_0 < 0$ genau dann differenzierbar, wenn f_1 in x_0 differenzierbar ist.

II) f ist in $x_0 > 0$ genau dann differenzierbar, wenn f_2 in x_0 differenzierbar ist.

Im Fall $x_0 \neq 0$ können dann auch die bekannten Regeln zur Differentiation von Funktionen (Produktregel, Kettenregel,...) auf die Funktionen f_1 bzw f_2 angewendet werden. Im Fall $x_0 = 0$ muß nach Definition des Limes sowohl die Definition der Funktion für $x > 0$ als auch die Definition der Funktion für $x < 0$ berücksichtigt werden.

Die üblichen Differentiationsregeln (Kettenregel, Produktregel, ...) können somit nicht unmittelbar auf die Untersuchung der Differenzierbarkeit in $x_0 = 0$ angewendet werden.

Die Untersuchung auf Existenz und gegebenenfalls Berechnung des Limes des Differenzenquotienten gemäß der Definition der Differenzierbarkeit (Vorlesung 15.1, Kaballo 19.1), d.h. $f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, indem z.b. die einseitigen Limiten untersucht und berechnet werden, ist natürlich immer und so auch hier in $x_0 = 0$ möglich.

Somit kann die Funktion h für $x_0 \neq 0$ nach den üblichen Regeln auf Differenzierbarkeit untersucht werden. Für $x_0 < 0$ gilt $h'(x_0) = -e^{x_0}$ und für $x_0 > 0$ gilt $h'(x_0) = 0$. Für $x_0 = 0$ wird auf die Definition zurückgegriffen werden:

Da die einseitigen Limiten $\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1-e^x-0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^0-e^x}{x} = -\lim_{x \to 0^-} \frac{e^0-e^x}{0-x} = -e^0 = -1$

und $\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0-0}{x} = 0$ ungleich sind, folgt, daß $\lim_{x \to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ nicht existiert. Somit ist h in 0 nicht differenzierbar. Insgesamt gilt:

$$h'(x) = \begin{cases} -e^x & : \ x < 0 \\ \text{existiert nicht} & : \ x = 0 \\ 0 & : \ x > 0 \end{cases} \quad .$$

Alternative Möglichkeit zur Untersuchung der Differenzierbarkeit in 0 : Da h in 0 stetig ist, folgt mittels Folgerung 16.6 Vorlesung (20.8 Kaballo) aus der Existenz von $h'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} h'(x) = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$ und $h'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} h'(x) = \lim_{x \to 0^-} -e^x = -1$ die rechts- und linksseitige Differenzierbarkeit von h in 0. Da die einseitigen Ableitungen nicht übereinstimmen, folgt, daß der Grenzwert des Differenzenquotient von h in 0 nicht existiert. Damit ist h in 0 nicht differenzierbar.

Analog zu h gilt, daß die Funktion j für $x_0 \neq 0$ nach den üblichen Regeln differenziert werden kann: Für $x < 0$ gilt $j'(x) = 0$ und für x>0 gilt $j'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$. Für $x_0 = 0$ werden wieder die einseitigen Limiten des Differenzenquotient untersucht: Es gilt $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{j(x)-j(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}>0}{=} \lim\limits_{y\to\infty} ye^{-y} = 0$ (nach Vorlesung 9.4, Kaballo 11.5, vgl. auch Übungsaufgabe 29) und $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{j(x)-j(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{0-0}{x} = 0$

Damit folgt, daß $\lim\limits_{x\to 0} \frac{j(x)-j(0)}{x-0} = 0$ existiert, d.h. j ist in 0 differenzierbar und es gilt $j'(0) = 0$. Damit ergibt sich:

$$j'(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & : \ x > 0 \end{cases}$$

Alternativer Beweis der Differenzierbarkeit in 0 : Da j in 0 stetig ist (Übungsaufgabe 29), folgt mittels Folgerung 16.6 Vorlesung (20.8 Kaballo) aus der Existenz von $j'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} j'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} -\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = 0$ und $j'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} j'(x) = 0$ die rechts- und linksseitige Differenzierbarkeit von j in 0. Da die einseitigen Ableitungen übereinstimmen, folgt, daß j in 0 differenzierbar ist und $j'(0) = 0$.

Hinweis: Folgerung 16.6 ist (nur) ein hinreichendes Kriterium für die Existenz der Ableitung, indem die Existenz der (einseitigen) Grenzwerte der Ableitung in einem Punkt ausgenutzt wird. Ist die Existenz der (einseitigen) Grenzwerte der Ableitung nicht gegeben, dann ist mit Folgerung 16.6 keine Aussage möglich. Sobald sin bekannt ist, kann die Funktion $f(x) := \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x^2}) & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$ betrachtet werden. Aus der Definition der Ableitung oder Aufgabe 41, folgt, daß f auch in 0 differenzierbar ist. Allerdings existieren die (einseitigen) Limiten von f' in 0 nicht. Damit ist in diesem Fall Folgerung 16.6 nicht anwendbar.

Aufgabe 40

Durch die Ersetzung $\tilde{x} = x + \epsilon \ \Leftrightarrow \ \epsilon = \tilde{x} - x$ folgt unmittelbar:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)+f(x)}{\epsilon} \overset{\tilde{x}=x+\epsilon}{=} \lim_{\tilde{x}\to x} \frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x} = f'(x) \quad .$$

Es sei nun $\overline{a}, \overline{b} \in J$ mit $a < \overline{a} < \overline{b} < b$ gegeben. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overline{b} + \frac{1}{n_0} < b$. Somit ist für

$n \geq n_0$ die Funktion $h_n : [\overline{a}, \overline{b}] \to \mathbb{R}$, $h_n(x) := \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$ wohldefiniert.

Aus $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} = f'(x)$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = f'(x)$, d.h. die Funktionenfolge h_n konvergiert punktweise gegen f' auf dem Intervall $[\overline{a}, \overline{b}]$. Zum Beweis der gleichmäßigen Konvergenz sei nun $\epsilon > 0$ beliebig gegeben. Zu zeigen ist nun, daß es $n_1 \in \mathbb{N}$gibt mit:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [\overline{a}, \overline{b}] : \quad n \geq n_1 \ \Rightarrow \ |h_n(x) - f'(x)| < \epsilon$$

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Vorlesung 16.4, Kaballo 20.5) folgt, daß zu $x \in [\overline{a}, \overline{b}]$ und $n \geq n_0$ ein $\xi = \xi(x,n) \in (x, x+\frac{1}{n})$ gibt mit:

$$h_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{x+\frac{1}{n}-x} = f'(\xi)$$

Nach Voraussetung gilt $f \in \mathcal{C}^1(J)$, d.h. f ist differenzierbar und f' ist stetig. Insbesondere ist f' auf dem kompakten Intervall $[\overline{a}, \overline{b}+\frac{1}{n_0}]$ gleichmäßig stetig. Damit gibt es zu dem gegebenem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit:

$$\forall x_1, x_2 \in [\overline{a}, \overline{b}+\frac{1}{n_0}] \ : \ |x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow \ |f'(x_1) - f'(x_2)| < \epsilon \ .$$

Es sei nun $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 > \frac{1}{\delta}$. Dann gilt für $n \geq n_1$ und einem beliebigen $x \in [\overline{a}, \overline{b}]$: Es gibt $\xi = \xi(x,n) \in (x, x+\frac{1}{n})$, also insbesondere $|x - \xi| < \frac{1}{n_1} < \delta$. Damit folgt dann

$$|h_n(x) - f'(x)| = \left|\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} - f'(x)\right| = |f'(\xi) - f'(x)| \overset{f' \text{ gleichmäßig stetig}}{<} \epsilon,$$

d.h. (h_n) konvergiert auf dem Intervall $[\overline{a}, \overline{b}]$ gleichmäßig gegen f'.

Zusatz: Wenn f nur als differenzierbar vorausgesetzt wird, f' also unstetig ist, ist die Konvergenz der (h_n) gegen f' nicht gleichmäßig, wenn im Intervall $[\overline{a}, \overline{b}]$ eine Unstetigkeitsstelle von f' liegt. Denn die Funktionenfolge (h_n) ist eine Folge von stetigen Funktionen. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge (h_n), würde dann die Stetigkeit von f' folgen. Widerspruch. Eine Funktion mit unstetiger Ableitung in 0 liefert z.b. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$.

Aufgabe 41

Aus $|f(x)| \leq c \cdot |x|^\gamma$ für $x \in (-1,1)$, folgt $|f(0)| \leq c \cdot |0|^\gamma = 0$. Weiter folgt:

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{c \cdot |x|^\gamma}{|x|} = c \cdot |x|^{\gamma - 1} \overset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{da } \gamma - 1 > 0 \text{ gilt.}$$

Damit ist f differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$.

Zusatz : Wegen $\lim\limits_{y \to -\infty} y^n e^y = 0 \overset{y = -\frac{1}{x}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Definition des Grenzwertes, daß gilt: Es gibt $\delta > 0$ mit $\left|\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} - 0\right| < 1$ für $0 < x < \delta$. Damit ergibt sich für $0 < x < \delta$ dann $|e^{-\frac{1}{x}}| < x^2$. Somit ist Aufgabe 41 auf die Funktion j aus Aufgabe 39 anwendbar.

Aufgabe 42

Mittels Ketten- und Produktregel folgt für die Ableitungen von $h = g \circ f$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= g'(f(x) \cdot f'(x) \\
h''(x) &= g''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + g'(f(x)) \cdot f''(x) \\
h'''(x) &= g'''(f(x)) \cdot (f'(x))^3 + 3g''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f''(x) + g'(f(x)) \cdot f'''(x) \\
h^{(4)}(x) &= g^{(4)}(f(x)) \cdot (f'(x))^4 + 6g'''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 \cdot f''(x) + \\
&\quad + g''(f(x)) \cdot \big(3(f''(x))^2 + 4f'(x) \cdot f'''(x)\big) + g'(f(x)) \cdot f^{(4)}(x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 43

Die Ableitungen von Zähler $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \neq 0$ und Nenner $\lim\limits_{x \to 0} 1 - \frac{1}{x+1} = 0$ existieren. Da l'Hospital (Vorlesung 16.10; Kaballo 20.15) für den Fall »$\frac{1}{0}$« nicht gilt, wird zunächst $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \log(1+x)}{e^x - 1}$ (der Kehrwert!) betrachtet.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{x - \log(1+x)}{e^x - 1} &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{e^x} \text{(insbesondere ist die Ableitung des Nenner } \neq 0) \\
&= \frac{0}{1} = 0
\end{aligned}$$

Wegen $x > \log(1+x) \overset{\exp \text{ monoton}}{\Leftrightarrow} e^x > 1 + x$ Vorlesung 9.4; Kaballo 11.5) gilt $x - \log(1+x) > 0$ für alle $x > 0$. Aus der Monotonie der Exponentialfunktion und $e^0 = 1$ folgt, daß $e^x - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 0$ und $e^x - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0$ gilt. Insgesamt folgt dann:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x-\log(x+1)} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x-\log(x+1)} = -\infty$$

Somit existiert $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x-\log(x+1)}$ auch nicht uneigentlich.

Zunächst sei $b = a$. Dann folgt unmitelbar $\lim_{x\to 1} \frac{a}{1-x^a} - \frac{a}{1-x^a} = 0$. Nun sei $a \neq b$. Da $\lim_{x\to 1^+} \frac{a}{1-x^a} = -\infty$ und $\lim_{x\to 1} \frac{a}{1-x^a} = \infty$ und für b analog gelten, läßt sich über $\lim_{x\to 1} \frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b}$ unmittelbar nichts sagen. Umschreiben der Differenz ergibt: $\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} = \frac{a(1-x^b)-b(1-x^a)}{(1-x^a)(1-x^b)}$. Da Nenner und Zähler gegen 0 konvergieren, kann man l'Hospital anzuwenden versuchen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} &= \lim_{x\to 1} \frac{a(1-x^b)-b(1-x^a)}{(1-x^a)\cdot(1-x^b)} \\
(1) \quad &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-abx^{b-1}+abx^{a-1}}{-ax^{a-1}(1-x^b)-bx^{b-1}(1-x^a)} \\
(2) \quad &\overset{\text{l'Hospital } a\neq 1, b\neq 1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-ab^2x^{b-2}+a^2bx^{a-2}}{-a(a-1)x^{a-2}(1-x^b)+abx^{a-1}x^{b-1}-b(b-1)x^{b-2}(1-x^a)+abx^{a-1}x^{b-1}} \\
&= \frac{-ab^2+a^2b}{0+ab+0+ab} = \frac{ab(a-b)}{2ab} = \frac{a-b}{2}
\end{aligned}$$

Hinweis: Die Rechnung läßt sich von unten nach oben begründen: Z.B gilt Gleichheitszeichen (2) wegen:

Da $\lim_{x\to 1} \frac{-ab^2x^{b-2}+a^2bx^{a-2}}{-a(a-1)x^{a-2}(1-x^b)+abx^{a-1}x^{b-1}-b(b-1)x^{b-2}(1-x^a)+abx^{a-1}x^{b-1}} = \frac{a-b}{2}$ und $\lim_{x\to 1} -abx^{b-1}+abx^{a-1} = 0$ und $\lim_{x\to 1} -ax^{a-1}(1-x^b) - bx^{b-1}(1-x^a) = 0$ gilt und $-ax^{a-1}(1-x^b) - bx^{b-1}(1-x^a) \neq 0$ ($\ldots > 0$ für $x > 0$ und $\ldots < 0$ für $x < 0$, d.h. Ableitung des Nenner ist $\neq 0$) gilt, folgt mit l'Hospital

$\lim_{x\to 1} \frac{-abx^{b-1}+abx^{a-1}}{-ax^{a-1}(1-x^b)-bx^{b-1}(1-x^a)} = \frac{a-b}{2}$. (Eine wichtige Voraussetzung von l'Hospital ist: $\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ existiert.) Analog läßt sich Gleichheitszeichen (1) begründen.

Für $a \neq 1 = b$ folgt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-a1x^0+a1x^{a-1}}{-ax^{a-1}(1-x^1)-1x^0(1-x^a)} = \lim_{x\to 1} \frac{a(a-1)1x^{a-2}}{-a(a-1)x^{a-2}(1-x^1)+a1x^{a-1}+a1x^{a-1}} = \frac{a(a-1)}{2a} = \frac{a-1}{2} \overset{b=1}{=} \frac{a-b}{2}$$

Analog ergibt sich für $a = 1 \neq 1$ dann auch $\lim_{x\to 1} \frac{-1bx^{b-1}+1bx^0}{-1x^0(1-x^b)-bx^{b-1}(1-x^1)} = \frac{1-b}{2}$.

Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} = \frac{a-b}{2}$$

Aufgabe 44

Es sei W die Wackelfunktion (Vorlesung: Beispiele 7.8, Kaballo 8.15). Nach Vorlesung gilt für die Wackelfunktion W: W ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, der Limes von W in 0 existiert nicht und es gilt $-1 \leq W(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

1.Beispiel: Es sei $f_1 := W + 1$. Dann gilt $0 \leq f_1(x) \leq 2$ für alle $x \in [0,1]$, d.h. f_1 ist beschränkt und nicht negativ.Weiter ist f_1 auf $(0,1]$ offensichtlich stetig und der Limes von f_1 in 0 existiert nicht. Da für eine Regelfunktion in allen Punkten die einseitigen Limiten existieren (Kaballo, Satz 18.10) ist f_1 keine Regelfunktion auf $[0,1]$. (Alternativer Beweis: Die Regelfunktionen bilden einen Vektorraum. Angenommen f_1 wäre eine Regelfunktion. Dann wäre auch $W = f_1 - 1$ eine Regelfunktion. Widerspruch.)

2.Beispiel: Es sei $f_2 := \max\{W, 0\}$, d.h. $f_2(x) := \max\{W(x), 0\}$ für $x \in [0,1]$. Wegen $0 \leq f_2(x) \leq 1$ ist f_2 offensichtlich beschränkt und nicht negativ. Wegen

$$f_2(x) := \max\{W(x), 0\} = \frac{W(x)+0}{2} + \frac{|W(x)+0|}{2} = \frac{W(x)}{2} + \frac{|W(x)|}{2}$$

[1] ist f_2 offensichtlich auf $(0,1]$ stetig. Analog zur Wackelfunktion W folgt, daß der Limes von f_2 in 0 nicht existiert. Damit ist f_2 auch keine Regelfunktionauf $[0,1]$.

Es sei nun f eine beliebige auf $(0,1]$ beschränkte nicht negative stetige Funktion, die nicht zu einer Regelfunktion auf $[0,1]$ fortgesetzt werden kann. Wie schon in Aufgabe 37 untersucht, existiert

$$\int_{0+}^{1} f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\epsilon}^{1} f(x)\,dx \qquad .$$

(Die Funktion $0 < \epsilon \to \; h(\epsilon) \; := \int\limits_{\epsilon}^{1} f(x)\,dx$ wird für kleiner werdendes ϵ größer, d.h. h ist monoton fallend,

und (nach oben) beschränkt. Deshalb existiert $\lim_{\epsilon \to 0+} h(\epsilon)$.) Es läßt sich also der Fläche zwischen Graph von f und $x-$Achse auf dem Intervall $(0,1]$ in sinnvoller Weise ein Flächeninhalt zuordnen, wobei diese Zuordnung die in der Vorlesung besprochenen Eigenschaften wie z.B. Additivität hat. Da aber f keine Regelfunktion auf dem Intervall $[0,1]$ ist, existiert $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}$ nicht. Nach diesen Überlegungen läßt sich der Flächenbegriff auf eine größere Menge von Funktionen (bzw. die Mengen zwischen Graphen und $x-$ Achse) sinnvoll fortsetzen. Damit lößt das Regelintegral den Flächenbegriff nicht alllgemein genug.

1.Hinweis: Es läßt sich für die hier untersuchten Funktionen (und noch einige Funktionen mehr) ein uneigentliches Integral erklären:

$$\int_{0+}^{1} f(x)\ dx \ := \ \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} f(x)\,dx$$

Wie der Name schon andeutet (un-eigentliches Integral; un=germanische Verneinungssilbe; Wie tief ist eigentlich eine Untiefe?), handelt es sich nicht mehr um das eigentliche Integral. Die Gültigkeit aller Aussagen für das eigentliche Integral sind für das uneigentliche Integral zunächst nicht bekannt. Zum Teil gelten diese Aussagen *auch nicht* für das uneigentliche Integral, d.h. diese Aussagen sind für das uneigentliche Integral sogar falsch (zum Beispiel der wichtige Konvergenzsatz 14.15 aus der Vorlesung (Kaballo 18.2))

2.Hinweis: Es gibt zwei weitere (wichtige) Integralbegriffe : das Riemann-Integral und das Lebesgue-Integral. Die hier behandelten Funktionen sind sowohl bzgl. des Riemann-Integral als auch des Lebesgue-Integral (eigentlich) integrierbar, d.h. ohne die Hilfskonstruktion des uneigentlichen Integrals. Für die Definition des Riemann-Integral als auch des Lebesgue-Integral kann auch vom Integral für Treppenfunktionen gestartet werden. Beide Integralbegriffe unterscheiden sich untereinander als auch zum Regelintegral in der Art, wie jeweils die Menge der integrierbaren Funktionen definiert wird und wie die Fortsetzung des Integrals für Treppenfunktionen geschieht.

[1] Es seinen $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a+b|}{2}$. Beweis mittels Fallunterscheidung.