UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 1

Abgabe 22.04.02

1. Man formuliere die folgenden logischen Aussagen unter Verwendung von ε und δ um.

   1. Die reelle Folge (x_n) konvergiert nicht gegen $c \in \mathbb{R}$.
   2. Die reelle Folge (x_n) divergiert.
   3. Die reelle Folge (x_n) konvergiert nicht gegen unendlich.
   4. Es seien A und B logische Aussagen. Man formuliere [nicht (A und B)] um.
   5. Man formuliere [nicht (A oder B)] um.
   6. Man spezifiziere und verifiziere die Aussagen 4 und 5 an Beispiel der Aussagen:
      - A: n ist eine gerade Zahl.
      - B: n ist durch 3 teilbar.

2. Es sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen und E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Man zeige: Aus $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{K}$, $x_n, x, y \in E$ und

$$\lambda_n \to \lambda \text{ in } \mathbb{C} \quad und \quad \mathrm{x}_n \to x \text{ in } E$$

folgt

$$\lambda_n x_n + y \to \lambda x + y$$

3. Welche der folgenden Formeln definieren Normen auf $\mathbb{K}^3$?

   1. $\|x\| := |x_1|^{1/2} + |x_2| + |x_3|$
   2. $\|x\| := \max\{|x_1|, |x_2 + x_3|, |x_2 - x_3|\}$
   3. Sei $0 < p < \infty$ und $\|x\| := \Big(|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p\Big)^{1/p}$. Für welche p ist dies eine Norm?

4. Welche der folgenden Formeln definieren eine Metrik auf $\mathbb{R}$?

   1. Für welche $p > 0$ definiert $d(x,y) := |x-y|^p$ eine Metrik?
   2. $d(x,y) := \min\{|x-y|, 1\}$,
   3. $d(x,y) := (x^2+1)|x-y|$,
   4. $d(x,y) := |x+y|$

5. Es sei $E = C^1([0,1])$, $\|u\| = \sup_{0\le x\le 1} |u(x)|$ die Supremumsnorm, $\|u\|_{L^1} = \int_0^1 |u(x)|\, dx$ die L^1 Norm und $\|u\|_{C_b^1} = \max\{\|u\|, \|u'\|\}$ die C^1-Norm auf E. Sind zwei dieser Normen äquivalent? Wenn ja, welche? Impliziert punktweise Konvergenz auch Konvergenz in einer der Normen? Impliziert Konvergenz in einer (oder mehreren) der Normen punktweise Konvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz?