Musterlösung zu Blatt 1

Aufgabe 1:

1. Die reelle Folge (x_n) konvergiert nicht gegen $c \in \mathbb{R}$

$$\iff \exists\, \varepsilon > 0 \,\forall\, n_0 \in \mathbb{N} \exists\, n \geq n_0 : \; |x_n - c| \geq \varepsilon$$

$$\iff \exists\, \varepsilon > 0 \text{ und Teilfolge } (x_{n_j}) : |x_{n_j} - c| \geq \varepsilon$$

2. Die reelle Folge (x_n) divergiert

$$\iff \forall c \in \mathbb{R} \exists\, \varepsilon > 0 \,\forall\, n_0 \in \mathbb{N} \exists\, n \geq n_0 : \; |x_n - c| \geq \varepsilon$$

$$\iff \forall c \in \mathbb{R} \exists\, \varepsilon > 0 \text{ und Teilfolge } (x_{n_j}) : |x_{n_j} - c| \geq \varepsilon$$

3. Die reelle Folge (x_n) konvergiert nicht gegen unendlich

$$\iff \exists\, c \in \mathbb{R} \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \exists\, n \geq n_0 : x_n \leq c$$

$$\iff \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ und Teilfolge } (x_{n_j}) : x_{n_j} \leq c$$

4. nicht (A und B) $\iff$ (nicht A) oder (nicht B) (s.u.)

5. nicht (A oder B) $\iff$ (nicht A) und (nicht B) (s.u.)

6.
   - A: n ist eine gerade Zahl.
   - B: n ist durch 3 teilbar.

   Hier ist Aussage 4 erfüllt genau dann, wenn gilt, dass n ungerade ist oder n nicht durch 3 teilbar ist.
   Aussage 5 ist erfüllt genau dann, wenn n ungerade ist und n nicht durch 3 teilbar ist.

A	B	nicht (A und B)	(nicht A) oder (nicht B)	nicht (A oder B)	(nicht A) und (nicht B)
w	w	f	f	f	f
w	f	w	w	f	f
f	w	w	w	f	f
f	f	w	w	w	w

Aufgabe 2:

Es sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen und E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Seien $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{K}$ sowie $x_n, x, y \in E$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \lambda_n \to \lambda \text{ in } \mathbb{C} \text{ und } x_n \to x \text{ in } E \\ \Rightarrow \quad & \lambda_n x_n + y \to \lambda x + y \text{ in } E \end{aligned}$$

Bew:
Zu zeigen ist:

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,\forall\, n \geq n_0 :\ \|\lambda_n x_n + y - (\lambda x + y)\| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n^* := \max\{n_0, n_1\}$ sowohl $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$ als auch $\|x_n - x\| < \varepsilon$ ist. Also folgt für $n \geq n^*$:

$$\begin{aligned}
\|\lambda_n x_n + y - (\lambda x + y)\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda x\| \\
&\leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| \\
&= |\lambda_n|\|x_n - x\| + \|x\||\lambda_n - \lambda| \\
&\leq C\varepsilon \quad \text{mit } C := \max\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|, \|x\|\right\}
\end{aligned}$$

(Dabei ist (λ_n) beschränkt, da diese Folge konvergent ist.) $\square$

Aufgabe 3:

1. Durch
$$\|x\| := |x_1|^{1/2} + |x_2| + |x_3|$$
wird keine Norm auf dem $\mathbb{K}^3$ definiert, da z.B.
$$\|4(1,0,0)^T\| = 2 \neq 4 = 4\|(1,0,0)^T\|$$

2. Durch
$$\|x\| := \max\{|x_1|, |x_2 + x_3|, |x_2 - x_3|\}$$
wird eine Norm auf dem $\mathbb{K}^3$ definiert: Für jedes $x \in \mathbb{K}^3$ ist $\|x\| \geq 0$ und es gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{K}^3$ und $\alpha \in \mathbb{K}$:
$$\begin{aligned}
\|x\| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ und } x_2 + x_3 = 0 \text{ und } x_2 - x_3 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \iff x = 0
\end{aligned}$$
sowie
$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= \max\{|\alpha x_1|, |\alpha x_2 + \alpha x_3|, |\alpha x_2 - \alpha x_3|\} \\
&= |\alpha| \max\{|x_1|, |x_2 + x_3|, |x_2 - x_3|\} = \alpha\|x\|
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \max\{|x_1+y_1|, |x_2+y_2+x_3+y_3|, |x_2+y_2-(x_3+y_3)|\} \\
&\leq \max\{|x_1|+|y_1|, |x_2+x_3|+|y_2+y_3|, |x_2-x_3|+|y_2-y_3|\} \\
&\leq \max\{|x_1|, |x_2+x_3|, |x_2-x_3|\} + \max\{|y_1|, |y_2+y_3|, |y_2-y_3|\} \\
&= \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

3. Für $p \geq 1$ definiert

$$\|x\| = (|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p)^{1/p}$$

eine Norm auf $\mathbb{K}^3$ (siehe Vorlesung). Für $0 < p < 1$ wird so keine Norm auf $\mathbb{K}^3$ definiert, da z.B.

$$\|(1,0,0)^T + (0,1,0)^T\| = 2^{1/p} > 2 = \|(1,0,0)^T\| + \|(0,1,0)^T\|$$

Aufgabe 4:

1. Für $0 < p \leq 1$ wird durch

$$d(x,y) = |x-y|^p$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert, denn:

$$d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$$

sowie

$$d(x,y) = |x-y|^p = |y-x|^p = d(y,x)$$

Außerdem gilt für $s \geq 0$, dass die Funktion

$$\phi_s : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \ \phi_s(t) := t^p + s^p - (t+s)^p$$

nichtnegativ ist, denn $\phi_s(0) = 0$ und

$$\phi_s'(t) = p(t^{p-1} - \underbrace{(t+s)^{p-1}}_{\leq t^{p-1}}) \geq 0$$

Also ist $\phi_s(t) \geq 0$ und somit folgt für $s, t \geq 0$ und $0 < p \leq 1$:

$$(t+s)^p \leq t^p + s^p$$

Daraus folgt nun für $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $s = |x-z|$ und $t = |z-y|$:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y|^p \leq (|x-z| + |z-y|)^p \leq |x-z|^p + |z-y|^p \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

da die Funktion $[0,\infty) \to [0,\infty):\ x \mapsto x^p$ für $p > 0$ monoton wachsend ist. Für $p > 1$ wird so keine Metrik definiert, denn z.B. ist

$$d(1,3) = 2^p > 2 = d(1,2) + d(2,3)$$

2.

$$d(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}$$

definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}$, denn:

$$d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$$

und natürlich

$$d(x,y) = d(y,x)$$

Außerdem ist die Dreiecksungleichung erfüllt. Da $d(x,y) \leq 1$ stets gilt, könnte diese nur für $x, y, z \in \mathbb{R}$ verletzt sein, falls $|x-z|+|z-y| < 1$ ist. Dies impliziert aber $|x-y| < |x-z| + |z-y| < 1$ und die Ungleichung ist auch hier erfüllt.

3.

$$d(x,y) = (x^2+1)|x-y|$$

definiert keine Metrik auf $\mathbb{R}$, da z.B.

$$d(1,2) = 2 \neq 5 = d(2,1)$$

ist.

4.

$$d(x,y) = |x+y|$$

definiert keine Metrik auf $\mathbb{R}$, da z.B

$$d(1,-1) = 0$$

ist.

Aufgabe 5:

Es sei $E = \mathcal{C}^1([0,1])$.

1. Je zwei der drei folgenden Normen sind nicht äquivalent zueinander:

$$\|u\| = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|$$

$$\|u\|_{\mathcal{C}_b^1} = \max\{\|u\|, \|u'\|\}$$

$$\|u\|_{L^1} = \int\limits_0^1 |u(x)|dx$$

   Betrachte dazu die Funktionenfolge $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}, u_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\|u_n\| = 1$, $\|u_n\|_{\mathcal{C}_b^1} = n$ und $\|u_n\|_{L^1} = \frac{1}{n+1}$. Daraus folgt die Behauptung, denn gäbe es $c \in \mathbb{R}$ mit $\|u\| \leq c\|u\|_{L^1}$ für jedes $u \in E$, so folgt der Widerspruch

$$\forall\, n \in \mathbb{N}:\ 1 = \|u_n\| \leq c\|u_n\|_{L^1} = c\frac{1}{n+1}$$

   Analog kann man in den anderen Fällen einen Widerspruch konstruieren. Es gelten jedoch die Abschätzungen

$$\|u\|_{L^1} = \int\limits_0^1 |u(x)|dx \leq (1-0) \sup_{x\in[0,1]} |u(x)| = \|u\|$$

   und

$$\|u\| \leq \max\{\|u\|, \|u'\|\} = \|u\|_{\mathcal{C}_b^1}$$

2. Die punktweise Konvergenz impliziert nicht die Konvergenz in einer der drei Normen. Betrachte dazu z.B. die Funktionenfolge (vgl. Abb.1)

$$v_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ v_n(x) = \begin{cases} n^2(1+\cos(2\pi nx - \pi)) & \text{,falls } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{,sonst} \end{cases}$$

   Es ist $v_n \in \mathcal{C}^1([0,1])$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $v_n \to 0$ punktweise, aber es ist $\|v_n\| = 2n^2$ sowie $\|v_n\|_{\mathcal{C}_b^1} \geq \|v_n\| = 2n^2$ und

$$\begin{aligned} \|v_n\|_{L^1} &= \int_0^{1/n} n^2(1+\cos(2\pi nx - \pi))dx \\ &= n + n^2\left(\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi nx - \pi)\right)\Big|_0^{1/n}) = n \end{aligned}$$

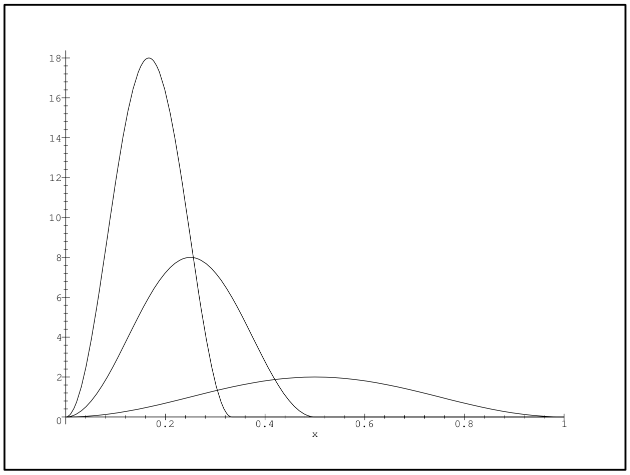

Abbildung 1: v_n für $n = 1, 2, 3$

Also kann (v_n) in keiner der Normen konvergieren, da (v_n) in keiner der Normen beschränkt ist.

3. Die Konvergenz in der Supremumsnorm impliziert gleichmäßige und damit auch punktweise Konvergenz in $\mathcal{C}([0,1])$, jedoch muß die Grenzfunktion nicht notwendig stetig differenzierbar und damit in E enthalten sein (vgl. Analysis I)!

4. Die Konvergenz in der $\mathcal{C}_b^1$-Norm impliziert wegen $\|u\| \leq \|u\|_{\mathcal{C}_b^1}$ für $u \in E$ auch Konvergenz in der Supremumsnorm und daher sowohl punktweise als auch gleichmäßige Konvergenz gegen eine stetige Grenzfunktion. Da ebenfalls die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen gewährleistet ist, folgt aus einem Satz aus Analysis I sogar, dass die Grenzfunktion auch stetig differenzierbar und somit in E enthalten ist und die Ableitung der Grenzfunktion der Grenzwert der Ableitungen der Folgeglieder ist.

5. Die Konvergenz in der L^1-Norm impliziert nicht punktweise Konvergenz und damit auch nicht gleichmäßige Konvergenz. Betrachte dazu die Funktionenfolge $w_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$w_n(x) := \begin{cases} n(1 + \cos(\pi n^2(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}) - \pi)) & \text{für } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $n \geq 2$ (vgl. Abb.2).

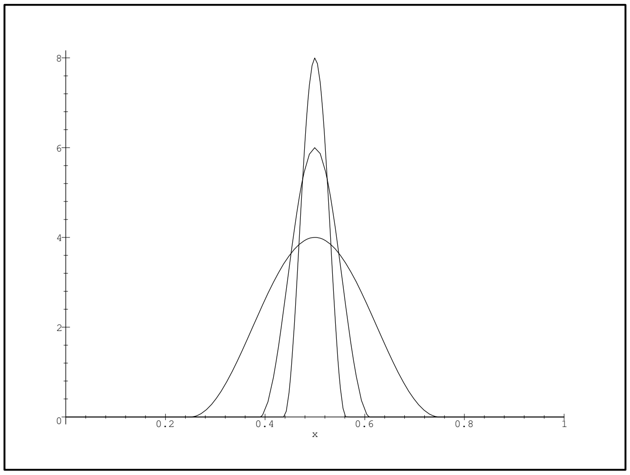

Abbildung 2: w_n für $n = 2, 3, 4$

Offenbar ist $w_n \in E$ für alle $n \geq 2$ und nicht punktweise konvergent, aber es gilt:

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{L^1} &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}} n(1+\cos(\pi n^2(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2})-\pi))dx \\
&= \frac{2}{n} + \frac{1}{\pi n}\sin(\pi n^2(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2})-\pi)\Big|_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

Also konvergiert w_n gegen 0 bezüglich der L^1-Norm.

Als Gegenbeispiele zu 5. lassen sich auch $\mathcal{C}^\infty([0,1])$-Funktionen wählen, welche eine ähnliche Struktur wie die angegebenen besitzen (also nur auf einer kompakten Teilmenge von $(0,1)$ ungleich null sind). Setze dazu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

und definiere

$$g(x) = f(x)f(1-x)$$

(vgl. Übungen zur Analysis I). Durch eine Skalierung von g erhält man die gewünschten Funktionen.