UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 2

Abgabe 29.04.02

6. Es sei $I = (a,b)$ ein offenes Intervall, $C_b^k(I)$ der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I mit beschränkten Ableitungen. Man verifiziere, daß

$$\|f\|_{C_b^k(I)} = \max_{1 \le i \le k} \|f^{(i)}\|$$

eine Norm definiert. Man zeige, daß $C_b^k(I)$ mit dieser Norm vollständig und damit ein Banachraum ist.

7. Man zeige, daß $(C_b([0,1]), \|.\|_{L^1}$ nicht vollständig ist. Man betrachte dazu die Funktionenfolge

$$f_n(x) := (x + 1/n)^{-1/2}.$$

Man zeige zunächst, daßf_n auf Intervallen der Form $[\varepsilon, 1]$ gleichmäßig gegen $x^{-1/2}$ konvergiert.

8. Man bestimme das Innere, den Abschluss und den Rand der folgenden Teilmengen von metrischen Räumen.

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$
$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$$
$$\{x \in \mathbb{Q}^n \,|\, |x| = 1\} \subset \mathbb{Q}^n$$
$$\{x \in \mathbb{Q}^n \,|\, |x| \le 1\} \subset \mathbb{Q}^n$$
$$\{x \in \mathbb{Q}^n \,|\, |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$
$$\{x \in \mathbb{Q}^n \,|\, |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$$
$$\{f \in C_b^1([0,1]) \,|\, \|f\|_{C_b^1([0,1])} \le 1\} \subset C_b([0,1]).$$

Welche dieser Mengen sind offen? Welche sind abgeschlossen? Welche sind dicht?

9. Man zeige: A) Eine beliebige Vereinigung offener Mengen ist offen.
B) Ein beliebiger Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.