Musterlösung zu Blatt 2

Aufgabe 6.

Als erstes verifizieren wir die drei Eigenschaften der Norm:

i) Es gilt: $\|f\|_{C_b^k(I)} = 0 \Rightarrow \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$, da $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C_b(I)$ ist. Umgekehrt, falls $f = 0$ gilt offensichtlich $\|f\|_{C_b^k(I)} = 0$.

ii) Es gilt: $\|\alpha f\|_{C_b^k(I)} = \max_{0\le i\le k} \|\alpha f^{(i)}\| = |\alpha| \max_{0\le i\le k} \|f^{(i)}\| = |\alpha|\|f\|_{C_b^k(I)}$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $f \in C_b^k(I)$.

iii) Es gilt: $\|f+g\|_{C_b^k(I)} = \max_{0\le i\le k} \|f^{(i)} + g^{(i)}\| \le \max_{0\le i\le k} \|f^{(i)}\| + \max_{0\le i\le k} \|g^{(i)}\| = \|f\|_{C_b^k(I)} + \|g\|_{C_b^k(I)}$.

Um die Vollständigkeit nachzuweisen, sei (f_n) eine Cauchyfolge in $C_b^k(I)$. Dies impliziert daß für alle $\epsilon > 0$ ein n_0 existiert, so daß für alle $m, n > n_0$ gilt: $\max_{0\le i\le k} \|f_n^{(i)} - f_m^{(i)}\| < \epsilon$, daher ist $(f_n^{(i)})$ eine Cauchyfolge in $C_b(I)$ für alle i, also gleichmäßig konvergent.

Aus Analysis I. ist bekannt daß die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge (f_n) und deren Ableitung (f_n') auf einen kompakten Intervall die Gleichheit: $f' = (\lim f_n)' = \lim f_n'$ impliziert. (Im Falle der Funktionenfolge wäre eigentlich die Konvergenz in einem Punkt ausreichend.) Es folgt daher daß $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in C_b^1(I)$ und daß $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$. Wenn wir dieses Schema rekursiv auf die Funktionenfolgen der Ableitungen $(f_n^{(i)})$ anwenden, erhalten wir im Endeffekt daß die Grenzfunktion f im Raum $C_b^k(I)$ liegt.

Aufgabe 7.

Zu zeigen ist daß der Raum $X = (C_b([0,1]), \|\cdot\|_{L^1})$ ist nicht vollständig.

Dazu betrachtet man die Funktionenfolge $f_n(x) = (x + 1/n)^{-1/2}$ und man verifiziert folgende drei Punkte:

1) f_n konvergiert auf $[\epsilon, 1]$ gleichmäßig gegen $f(x) = x^{-1/2}$, für alle $\epsilon \in (0,1)$.

Unter Anwendung des Mittelwertsatzes gilt:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \sup_{x\in[\epsilon,1]} \left|(x+1/n)^{-1/2} - x^{-1/2}\right| \\ &= \frac{1}{2n} \sup_{x\in[\epsilon,1]} |c_x^{-3/2}|, \text{ wobei } c_x \in (x, x+1/n). \end{aligned}$$

Es gilt daher:

$$\|f_n - f\| \le \frac{\epsilon^{-3/2}}{2n} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

2) (f_n) ist eine Cauchyfolge in $X = (C_b([0,1]), \|\cdot\|_{L^1})$.

Für $n > m$ gilt:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \int_0^1 \left|(x+1/m)^{-1/2} - (x+1/n)^{-1/2}\right| dx \\ &= \int_0^1 (x+1/m)^{-1/2} dx - \int_0^1 (x+1/n)^{-1/2} dx \\ &= 2(x+1/m)^{1/2}\Big|_0^1 - 2(x+1/n)^{1/2}\Big|_0^1 = \\ &= 2\sqrt{\frac{m+1}{m}} - \frac{2}{\sqrt{m}} - 2\sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \\ &= 2\left(\sqrt{\frac{m+1}{m}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 0 \text{ für } n, m \to \infty. \end{aligned}$$

Es folgt daher daß (f_n) eine Cauchyfolge in X ist.

3) Der L^1-Grenzwert der Folge (f_n) liegt nicht in X.

Angenommen es existiert eine Funktion $f \in C_b([0,1])$ mit $\|f_n - f\|_{L^1[0,1]} \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt auch für alle $\epsilon \in (0,1) : \|f_n - f\|_{L^1[\epsilon,1]} \to 0$ für $n \to \infty$.

Die gleichmäßige Kovergenz impliziert bekanntlich die L^1-Konvergenz (s. Blatt1, Aufg.5). Wegen 1) gilt aber: $f(x) = x^{-1/2}$ auf $[\epsilon, 1]$ für alle $\epsilon \in (0,1)$, daher gilt $f(x) = x^{-1/2}$ auf $(0,1]$. Diese Funktion besitzt aber keine stetige Fortsetzung im Punkt $x = 0$, da $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, also kann der L^1-Grenzwert der Folge (f_n) nicht in $C_b([0,1])$ liegen.

Aufgabe 8.

i) $A = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$.

Behauptung: $\overset{\circ}{A} = \{\}$

Zu zeigen ist: $\forall x \in A, \forall r > 0, K_r(x) \cap \mathbb{R}^n \setminus A \neq \{\}$.

Sei $\alpha \neq \pm 1$ mit $|1 - \alpha| < r$. Dann gilt: $|\alpha x| = |\alpha| \neq 1 \Rightarrow \alpha x \notin A$.

Andererseits gilt: $|1 - \alpha| < r \Leftrightarrow |x - \alpha x| < r$ d.h. $\alpha x \in K_r(x)$. Die Behauptung ist also bewiesen.

Behauptung: $\bar{A} = A$

Sei $|x| \neq 1$, z.B. sei $|x| < 1$. Definiere $r = (1-|x|)/2$. Dann gilt: $y \in K_r(x) \Leftrightarrow |y-x| < r \Leftrightarrow |y - x| < (1 - |x|)/2 \Leftrightarrow |x| + |y - x| < (1 + |x|)/2$. Wegen der Dreiecksungleichung: $|y| < |x| + |y - x|$ gilt also: $|y| < (1 + |x|)/2 < 1$, d.h. $K_r(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Folglich gilt $d(x, A) > r > 0$, also $x \notin \bar{A}$. Für $|x| > 1$ beweist man eine analoge Aussage. Daher folgt daß $A = \{x : d(x, A) = 0\} = \bar{A}$.

Aus den bisherigen Überlegungen folgt daß $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = A$. Die Menge A ist abgeschlossen, nicht offen, und auch nicht dicht in $\mathbb{R}^n$.

ii) $B = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$.

Behauptung: $\overset{\circ}{B} = B$

Sei $x \in B \Leftrightarrow |x| < 1$. Wie in i) kann man $r = (1 - |x|)/2$ definieren und zeigen daß $K_r(x) \subset B$.

Behauptung: $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| \leq 1\}$

Falls $|x| < 1$ gilt $x \in B \Rightarrow d(x, B) = 0$.

Falls $|x| = 1$, gilt wie in i), für alle $r > 0$, daß $K_r(x) \cap B \neq \{\}$. Es gilt also auch $d(x, B) = 0$.

Falls $|x| > 1$ kann man analog zu i) ein $r > 0$ finden, mit $d(x, B) > r > 0$, d.h. $x \notin \bar{B}$.

Die Behauptung ist also bewiesen.

Aus den bisherigen Überlegungen folgt daß $\partial B = \bar{B} \setminus \overset{\circ}{B} = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| = 1\}$. Die Menge B ist also offen, nicht abgeschlossen und auch nicht dicht in $\mathbb{R}^n$.

iii) $C = \{x \in \mathbb{Q}^n | \, |x| = 1\} \subset \mathbb{Q}^n$.

Behauptung: $\overset{\circ}{C} = \{\}$.

Zu zeigen ist: $\forall x \in C, \forall r > 0$ (reell!), $K_r(x) \cap \mathbb{Q}^n \setminus C \neq \{\}$.

Wie in i) kann man $\alpha \in \mathbb{Q}$ finden mit $\alpha x \in K_r(x) \cap \mathbb{Q}^n \setminus C$, so daß die Behauptung bewiesen ist.

Behauptung: $\bar{C} = C$

Der Beweis verläuft analog zu i).

Es folgt auch daß $\partial C = \bar{C} \setminus \overset{\circ}{C} = C$. Die Menge C ist abgeschlossen in $\mathbb{Q}^n$, ist nicht offen und auch nicht dicht.

Mit ähnlichen Überlegungen wie bei i)-iii) und unter der Benutzung der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ kann man folgendes beweisen:

iv) $D = \{x \in \mathbb{Q}^n | \, |x| \leq 1\} \subset \mathbb{Q}^n$: $\overset{\circ}{D} = \{x \in \mathbb{Q}^n | \, |x| < 1\}; \bar{D} = D; \partial D = C$.

v) $E = \{x \in \mathbb{Q}^n | \ |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$: $\overset{\circ}{E} = \{\}; \bar{E} = A; \partial E = A$.

Bemerkung: In diesem Fall muß man die Sphäre ohne den Punkt $(0, 0, \ldots, 1)$ durch die *stereographische Projektion* auf $\mathbb{R}^n$ abbilden. Für $n = 2$ Sei (x_1, x_2) mit $\sum x_i^2 = 1$. Dann ist die Abbildung $\pi : S_1 \to \mathbb{R} \setminus \{(0, 1)\}$, $\pi(x_1, x_2) = 2x_1/(1 - x_2)$ stetig und stellt eine Bijektion zwischen der Menge E und $\mathbb{Q}$ dar. Im allgemeinen definiert man die stereographische Projektion eines Punktes auf der Späre als der Schnitt der Gerade der den Punkt mit den "Nordpol" verbindet mit der Ebene die im "Südpol" tangent an der Sphäre ist. Die Eigenschaften dieser Abbildung, zusammen mit der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ impliziert daß der Abschlusß der Menge E genau die Einheitsspäre in $\mathbb{R}^n$ ist.

vi) $F = \{x \in \mathbb{Q}^n | \ |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$: $\overset{\circ}{F} = \{\}; \bar{F} = A \cup B; \partial F = A \cup B$.

vii) $G = \{f \in C_b^1([0, 1]) | \|f\|_{C_b^1([0,1])} \leq 1\} \subset C_b([0, 1])$.

Behauptung: $\overset{\circ}{G} = \{\}$.

Es muß gezeigt werden, daß für alle $f \in G$ und für alle $r > 0$, $K_r(f) \cap C_b([0, 1]) \setminus G \neq \{\}$, d.h. daß es ein $g \in C_b([0, 1]) \setminus G$ gibt, mit $\|f - g\|_{C_b} < r$. Definiere $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(x) + r|x - 1/2|$. Es gilt: $g \in C_b([0, 1]) \setminus C_b^1([0, 1])$ und $\|f - g\|_{C_b} = sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = r \sup_{x\in[0,1]} |x - 1/2| = r/2 < r$. Die Funktion g erfüllt daher die gewünschten Voraussetzungen.

Behauptung: $\bar{G} = L := \{f \in C_b([0, 1] | |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \ \forall x, y \in [0, 1]\}$.

<u>Beweis</u>

$'' \subset ''$

Sei $f \in \bar{G} \subset C_b([0, 1])$. Es folgt daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein f_n in G existiert, mit $\|f - f_n\| < 1/n$.

Berechne für $x, y \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{1}{n} + \sup_{\xi\in[0,1]} |f'(\xi)| \cdot |x - y| + \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{2}{n} + |x - y|, \end{aligned}$$

da $f_n \in G$, daher $\|f_n'\| \leq 1$.

Die Ungleichung gilt für alle n, also ist $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \ \forall x, y \in [0, 1]\}$, d.h. $f \in L$.

$'' \supset ''$

Zu zeigen ist: $\forall f \in L, \forall \epsilon > 0, \exists g_n \in G$ mit $\|f - g_n\| < \epsilon$. Dazu approximiere f zunächst mit stückweise *linearen* Funktionen auf den Intervallen $[k/n, k + 1/n]$:

Sei

$$f_n(x) = n \left[f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n}) \right] (x - \frac{k}{n}) + f(\frac{k}{n})$$

für $x \in [k/n, k + 1/n]$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Es gilt:

$$f_n(\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n}) \text{ und } f_n(\frac{k+1}{n}) = f(\frac{k+1}{n}),$$

d.h. die lineare Approximation f_n stimmt in den Punkten k/n mit f überein.

Berechne

$$
\begin{aligned}
\|f_n - f\| &= \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{\substack{k=0,\dots,n-1\\ x\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}} |f_n(x) - f(x)| \\
&= \sup_{\substack{k=0,\dots,n-1\\ x\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}} \left| n\left[f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})\right](x - \frac{k}{n}) + f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| \\
&\le \sup_{\substack{k=0,\dots,n-1\\ x\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}} \left| n\left[f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})\right](x - \frac{k}{n}) \right| + \sup_{\substack{k=0,\dots,n-1\\ x\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}} \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right|
\end{aligned}
$$

Es gilt aber $f \in L$, d.h. $|f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})|, |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \le \frac{k}{n}$, daher:

$$\|f_n - f\| \le n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Die Funktionen f_n liegen nicht in G, da sie in den Punkten k/n nicht differenzierbar sind. Es gilt jedoch:

$$f_n(\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n}) \text{ und } f_n(\frac{k+1}{n}) = f(\frac{k+1}{n}),$$

und f_n ist monoton auf $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, es folgt also $\|f_n\| \le \|f\| \le 1$

Weiterhin gilt für $x \neq k/n$, $k = 0, \dots, n-1$: $|f_n'(x)| = |n(f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n}))| \le 1$, da $f \in L$.

Um die gewünschte Approximation durch glatte Funktionen $g_n \in G$ von f zu erhalten, "rundet" man die "Ecken" der Funktionen f_n an den Stellen k/n durch tangente kubische Parabelbögen ab, die z.B. in den Punkten $k/n - 1/n^2$ und $k/n + 1/n^2$ mit f_n übereinstimmen. Diese Konstruktion führt dabei nicht zu einer Zunahme der Maximumsnorm von g_n und g_n' bezüglich der Funktion f_n, und approximiert die Funktionen f_n mit der Ordnung $1/n^2$, also auch f mit der Ordnung $1/n$. Die Funktion g_n erfüllt also die gewünschte Eigenschaft, daß $g_n \in G$ und $\|f - g_n\| < \epsilon$ für n genügend groß . Die vier Koeffizienten der kubischen Polynome ergeben sich aus einem Gleichungssystem vierter Ordnung, daß aus dem Übereinstimmen der Funktionen g_n und f_n zusammen mit deren Ableitungen in den Punkten $k/n - 1/n^2$ und $k/n + 1/n^2$ hervorgeht. Dieser Teil der Aufgabe wird auf dieser intuitiven Ebene gelöst, die exakten Kalkulationen für die Konstruktion der Funktionen g_n werden hier nicht weitergeführt.

Aufgabe 9.

A. Seien $\{A_i\}_{i\in I}$ offene Mengen und sei $A = \cup_{i\in I} A_i$.

Sei $x \in A \Leftrightarrow \exists i \in I$ mit $x \in A_i$. A_i ist offen, daher existiert ein $r > 0$ mit $K_r(x) \subset A_i \subset A$. Es folgt dann daß auch A eine offene Menge ist.

B. Seien $\{B_i\}_{i\in I}$ abgeschlossene Mengen und sei $B = \cap_{i\in I} B_i$.

Es folgt daß die Komplemente B_i^c offen sind, und laut A. ist deren Vereinigung $\cup_{i\in I} B_i^c = B^c$ auch offen. Daher ist B abgeschlossen.